Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math.
Bd. 14, S. 1—38 (1968)

DIE RELATIVE KONSISTENZ AXIOMATISCHER MENGENTHEORIEN[0])

von MARTIN KÜHNRICH in Berlin

1. Einleitung

Einleitend sollen grundlegende Begriffsbildungen[1]), die im folgenden benötigt werden, erläutert werden. Dabei stützen wir uns vor allem auf die Arbeiten SCHRÖTER 1955 und TARSKI 1953.

1.1. Unter einer *Theorie mit Standardformalisierung* versteht man nach TARSKI eine im Prädikatenkalkül der ersten Stufe mit Identität formalisierte Theorie. In allen Theorien mit Standardformalisierung werden dieselben Zeichen[2]) als Variablen, als logische Konstanten und als technische Zeichen genommen; abgesehen von Unterschieden in den nicht-logischen Konstanten, werden dieselben Zeichenreihen als Ausdrücke, als Aussagen, als logische Axiome und als aus der leeren Menge ableitbare Aussagen (*logically valid sentences*) betrachtet. Theorien mit Standardformalisierung haben nur eine Sorte von Variablen. '$\sim$', '$\wedge$', '$\vee$', '$\rightarrow$', '$\leftrightarrow$', '$\forall$', '$\exists$', '$=$' sollen die logischen Konstanten sein. Das Gleichheitszeichen '$=$' wird aber auch als zweistelliges Prädikat aufgefaßt. Als technische Zeichen benutzen wir die Klammern '(', ')', und als Variablen[3]) nehmen wir die Zeichen 'r', 's', 't', 'u', 'v', 'w', 'x', 'y', 'z' (evtl. mit Indizes). Als syntaktische Variablen[4]) für die Variablen der Theorien mit Standardformalisierung benutzen wir die Zeichen 'a', 'b', 'c', 'd' (evtl. mit Indizes), als syntaktische Variablen für Prädikate wählen wir die Zeichen 'P' und 'Q' (evtl. mit Indizes), als syntaktische Variable für Zeichenreihen nehmen wir das Zeichen 'Z' (evtl. mit Indizes), als syntaktische Variable für Terme dient das Zeichen 'T' (evtl. mit Indizes), und das Zeichen 'H' (evtl. mit Indizes) sei syntaktische Variable für Ausdrücke. '$H(a_1, \ldots, a_n)$' sei syntaktische Variable für die Ausdrücke, in denen die Variablen $a_1, \ldots, a_n$ vollfrei vorkommen, und '$H(a/b)$' sei syntaktische Variable für die Ausdrücke, die aus Ausdrücken, in denen die Variable a vollfrei vorkommt, dadurch hervorgingen, daß an allen Stellen des Vorkommens die Variable a in die Variable b umbenannt wurde und dabei keine Variablenkonfusion[5]) auftrat. Verschieden bezeichnete Zeichenreihen sollen in der Regel verschieden sein. Wir benutzen teilweise die Regeln der Klammersparung und die Regeln der Trennstärke logischer Konstanten beim Niederschreiben von Ausdrücken.[6])

---

[0]) Dissertation Humboldt-Universität, Berlin 1967.

[1]) Diese Begriffsbildungen sind (bis auf geringfügige Modifikationen) in den Vorlesungen und Seminaren unter Leitung von Herrn Prof. Dr. SCHRÖTER üblich.

[2]) Diese Verabredungen über Theorien mit Standardformalisierung sind in TARSKI 1953 getroffen worden.

[3]) Genauer: *Individuenvariablen*; vgl. SCHRÖTER 1955.

[4]) Vgl. FRAENKEL 1958.

[5]) Vgl. SCHRÖTER 1956.

[6]) Vgl. ASSER 1959.

UNIV. LEIDEN BIBL.

1.2. Ist *sp* eine Menge nicht-logischer Konstanten, so nennen wir einen Ausdruck H einen *Ausdruck bzgl. sp*, wenn die in H vorkommenden nicht-logischen Konstanten zu *sp* gehören. Eine Theorie T heißt eine *axiomatische Theorie*, wenn eine Menge sp_{T} (*Sprache von* T) von nicht-logischen Konstanten und eine Menge ax_{T} (*Axiomensystem von* T) von Aussagen bzgl. sp_{T}, *nicht-logische Axiome von* T genannt, festgelegt wurden und wenn definiert wurde, daß ein Ausdruck H *beweisbar in* T ($\vdash_{\mathsf{T}} H$) ist, wenn H ein Ausdruck bzgl. sp_{T} ist (kurz: H *Ausdruck von* T) und wenn H aus ax_{T} ableitbar ist. Da wir uns in dieser Arbeit ausschließlich für axiomatische Theorien mit Standardformalisierung interessieren, deren nicht-logische Konstanten endlich viele Prädikate sind, ist für uns im folgenden eine Theorie stets eine axiomatische Theorie mit Standardformalisierung, deren nicht-logische Konstanten endlich viele Prädikate sind.[1])

1.3. Ist T eine Theorie, so heißt $\mathfrak{M}$ *eine Interpretation von* T, wenn $\mathfrak{M}$ eine auf der Menge aller Variablen und Konstanten der Theorie T definierte Funktion ist und wenn gilt:

(a) Für beliebige Variablen a, b der Theorie T gilt $\mathfrak{M}(a) = \mathfrak{M}(b)$, und $\mathfrak{M}(a)$ ist eine nicht-leere Menge. $\mathfrak{M}(a)$ heißt der *Individuenbereich von* $\mathfrak{M}$, die Elemente von $\mathfrak{M}(a)$ heißen die *Individuen von* $\mathfrak{M}$.

(b) Für alle n-stelligen Prädikate P der Theorie T ist $\mathfrak{M}(P)$ ein n-stelliges Attribut über dem Individuenbereich von $\mathfrak{M}$; insbesondere ist das dem Gleichheitszeichen '=' zugeordnete zweistellige Attribut $\underset{\mathfrak{M}(a)}{=}$ die Menge aller geordneten Paare $[[\mathfrak{x}, \mathfrak{x}], W]$ mit $\mathfrak{x}$ Individuum von $\mathfrak{M}$ und aller geordneten Paare $[[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}], F]$ mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ Individuen von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{x}$ ungleich $\mathfrak{y}$.[2])

(c) Den logischen Konstanten '$\sim$', '$\wedge$', '$\vee$', '$\rightarrow$', '$\leftrightarrow$', '$\forall$', '$\exists$' werden durch $\mathfrak{M}$ respektive die Funktionen *non*, *et*, *vel*, *seq*, *aeq*, *Om*, *Ex* zugeordnet.[3])

Ist T eine Theorie und ist $\mathfrak{M}$ eine Interpretation von T, so heißt *f eine Belegung der Variablen der Theorie* T *mit Individuen von* $\mathfrak{M}$ genau dann, wenn f eine Funktion von der Menge aller Variablen von T in den Individuenbereich von $\mathfrak{M}$ ist.

---

[1]) In der Literatur sind verschiedene Formulierungen des Begriffs der Theorie und des Begriffs der Sprache gebräuchlich; man vergleiche etwa Fraenkel 1958, Rasiowa 1963, Montague 1965.

[2]) Die n-stelligen Attribute über dem Individuenbereich von $\mathfrak{M}$ sind dabei gerade die Funktionen, die jedem n-Tupel von Individuen von $\mathfrak{M}$ einen der beiden Wahrheitswerte W bzw. F zuordnen; vgl. Schröter 1955. Meistens werden in der Literatur, z. B. in Tarski 1953, anstelle der hier benutzten n-stelligen Attribute n-stellige Relationen benutzt; dabei versteht man unter einer n-stelligen Relation über einer Menge $\mathfrak{J}$ eine Menge von n-Tupeln von Elementen dieser Menge $\mathfrak{J}$. Die dem Gleichheitszeichen bei einer Interpretation $\mathfrak{M}$ dann zugeordnete zweistellige Relation $\underset{\mathfrak{M}(a)}{=}$ ist die Menge aller geordneten Paare $[\mathfrak{x}, \mathfrak{x}]$ mit $\mathfrak{x}$ Individuum von $\mathfrak{M}$. Ist $\mathfrak{R}$ eine n-stellige Relation über $\mathfrak{J}$, so nennen wir die durch

$$\chi_{\mathfrak{R}}([\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n]) = \begin{cases} W, \text{ falls } [\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n] \text{ Element von } \mathfrak{R}, \\ F, \text{ falls } [\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n] \text{ nicht Element von } \mathfrak{R} \end{cases}$$

definierte Funktion $\chi_{\mathfrak{R}}$ die *charakteristische Funktion der Relation* $\mathfrak{R}$ *bzgl.* W, F. Diese Funktion ist ein Attribut über $\mathfrak{J}$.

[3]) Vgl. Schröter 1955.

1.4. Ist T eine Theorie, ist $\mathfrak{M}$ eine Interpretation von T, ist f eine Belegung der Variablen von T mit Individuen von $\mathfrak{M}$ und ist H ein Ausdruck von T, so wird induktiv über die Ausdrucksstufe von H der *Wert des Ausdruckes H bzgl. der Belegung f der Variablen mit Individuen von* $\mathfrak{M}$ ($Wert(H, f, \mathfrak{M})$) definiert:

(1) a) $Wert(\ulcorner Pa_1 \ldots a_n \urcorner$ [1]$), f, \mathfrak{M}) = \mathfrak{M}(P)([f(a_1), \ldots, f(a_n)])$; [2]

b) $Wert(\ulcorner a = b \urcorner, f, \mathfrak{M}) = \underset{\mathfrak{M}(a)}{=}([f(a), f(b)])$;

(2) a) $Wert(\ulcorner \sim H \urcorner, f, \mathfrak{M}) = non(Wert(H, f, \mathfrak{M}))$;

b) $Wert(\ulcorner (H_1 \wedge H_2) \urcorner, f, \mathfrak{M}) = et(Wert(H_1, f, \mathfrak{M}), Wert(H_2, f, \mathfrak{M}))$;

c) $Wert(\ulcorner (H_1 \vee H_2) \urcorner, f, \mathfrak{M}) = vel(Wert(H_1, f, \mathfrak{M}), Wert(H_2, f, \mathfrak{M}))$;

d) $Wert(\ulcorner (H_1 \rightarrow H_2) \urcorner, f, \mathfrak{M}) = seq(Wert(H_1, f, \mathfrak{M}), Wert(H_2, f, \mathfrak{M}))$;

e) $Wert(\ulcorner (H_1 \leftrightarrow H_2) \urcorner, f, \mathfrak{M}) = aeq(Wert(H_1, f, \mathfrak{M}), Wert(H_2, f, \mathfrak{M}))$;

f) $Wert(\ulcorner \forall a H(a) \urcorner, f, \mathfrak{M}) = Om(N)$,
dabei sei N die Menge aller Wahrheitswerte $Wert(H(a), f^*, \mathfrak{M})$, wobei f^* eine beliebige Belegung der Variablen von T mit Individuen von $\mathfrak{M}$ ist, die sich von der Belegung f höchstens in dem Funktionswert $f(a)$ unterscheidet;

g) $Wert(\ulcorner \exists a H(a) \urcorner, f, \mathfrak{M}) = Ex(N)$,
dabei sei die Menge N wie in (2) f) erklärt [3].

Ist T eine Theorie, H ein Ausdruck dieser Theorie T und $\mathfrak{M}$ eine Interpretation von T, so wird definiert:

(a) H *ist allgemeingültig bzgl.* $\mathfrak{M}$ ($ag_{\mathfrak{M}} H$) genau dann, wenn für jede Belegung f der Variablen von T mit Individuen von $\mathfrak{M}$ gilt: $Wert(H, f, \mathfrak{M}) = W$.

(b) $\mathfrak{M}$ *ist Modell von* T genau dann, wenn sämtliche nicht-logischen Axiome von T allgemeingültig bzgl. $\mathfrak{M}$ sind.

(c) H *folgt in* T [4] ($\models_{\mathsf{T}} H$) genau dann, wenn H bzgl. aller Modelle von T allgemeingültig ist.

Nach dem GÖDELschen Vollständigkeitstheorem gilt für jede Aussage H einer Theorie T (mit Standardformalisierung):

$$\vdash_{\mathsf{T}} H \text{ genau dann, wenn } \models_{\mathsf{T}} H. \text{ [5]}$$

---

[1]) Vgl. QUINE 1951, *quasi-quotation*. '$\ulcorner \sim H \urcorner$' bezeichnet z. B. den Ausdruck, der dadurch entsteht, daß man unmittelbar hintereinander von links nach rechts '$\sim$' und H schreibt.

[2]) Benutzt man anstelle von Attributen Relationen, vgl. Fußnote 2 auf S. 2, so lautet Teil (1) der Wertdefinition:

a) $Wert(\ulcorner Pa_1 \ldots a_n \urcorner, f, \mathfrak{M}) = \chi_{\mathfrak{M}(P)}([f(a_1), \ldots, f(a_n)])$;

b) $Wert(\ulcorner a = b \urcorner, f. \mathfrak{M}) = \chi_{\underset{\mathfrak{M}(a)}{=}}([f(a), f(b)])$.

[3]) Vgl. SCHRÖTER 1956.

[4]) Genauer: *H folgt aus den Axiomen von* T.

[5]) Vgl. TARSKI 1953, Seite 9.

1.5. Sind T_1 und T_2 zwei Theorien, so heißt T_1 *eine Untertheorie von* T_2 (bzw. T_2 *eine Erweiterung von* T_1) genau dann, wenn jede in T_1 beweisbare Aussage auch in T_2 beweisbar ist. Eine Theorie T heißt *konsistent*, wenn nicht jede Aussage von T in T beweisbar ist; oder, in äquivalenter Formulierung, wenn es keine Aussage H gibt, so daß H und $\ulcorner\sim H\urcorner$ in T beweisbar sind. Eine Theorie T heißt *vollständig*, wenn es keine konsistente Erweiterung von T gibt, die von T verschieden ist und die dieselben Konstanten wie T hat; oder, in äquivalenter Formulierung, wenn für jede Aussage H von T entweder H oder $\ulcorner\sim H\urcorner$ in T beweisbar ist. Konsistenz und Vollständigkeit können auch mit Hilfe des Modellbegriffes charakterisiert werden: Eine Theorie T ist konsistent genau dann, wenn sie wenigstens ein Modell besitzt; sie ist vollständig genau dann, wenn jede Aussage von T, die in einem Modell von T allgemeingültig ist, auch in jedem anderen Modell von T allgemeingültig ist.[1])

1.6. Unter einer *möglichen Definition* eines n-stelligen Prädikates P in einer Theorie T, zu der dieses Prädikat nicht gehört, versteht man jede Zeichenreihe der Form $\ulcorner\forall a_1 \ldots \forall a_n(Pa_1 \ldots a_n \leftrightarrow H(a_1, \ldots, a_n))\urcorner$, wobei $H(a_1, \ldots, a_n)$ ein Ausdruck von T ist, in dem $a_1, \ldots, a_n$ sämtliche frei vorkommenden Variablen sind.

1.7. Im folgenden soll der Tarskische Begriff der *Interpretierbarkeit* von Theorien angegeben werden.[2]) Seien zunächst T_1, T_2 zwei Theorien, die keine nicht-logischen Konstanten gemeinsam haben. Dann heißt T_2 *interpretierbar in* T_1 [3]) genau dann, wenn es eine gemeinsame Erweiterungstheorie T von T_1 und von T_2 gibt, deren Konstanten genau die Konstanten von T_1 und von T_2 sind und deren Axiome genau die Axiome von T_1 sind und zu jeder nicht-logischen Konstanten von T_2 genau eine mögliche Definition dieser Konstanten in T_1. Eine solche Erweiterungstheorie T nennen wir auch eine *definitorische Erweiterung von* T_1 *bzgl.* T_2. Ist P ein n-stelliges Prädikat von T_2 und kommt die mögliche Definition

$$\ulcorner\forall a_1 \ldots \forall a_n(Pa_1 \ldots a_n \leftrightarrow H(a_1, \ldots, a_n))\urcorner$$

von P in T_1 unter den Axiomen von T vor, so nennen wir den Ausdruck $H(a_1, \ldots, a_n)$ von T_1 den *definierenden Ausdruck von* P *in* T und die mögliche Definition die *Definition von* P *in* T. Im allgemeinen Fall, wenn T_1 und T_2 einige gemeinsame nicht-logische Konstanten haben können, ersetzt man zunächst die nicht-logischen Konstanten von T_2 durch neue, nicht in T_1 vorkommende Konstanten (verschiedene Zeichen durch verschiedene Zeichen), ohne die Struktur von T_2 in irgendeiner anderen Hinsicht zu verändern; wenn die resultierende Theorie T_2' sich als interpretierbar in T_1 erweist, sagt man auch, daß T_2 in T_1 interpretierbar ist.[4]) Man

---

[1]) Entnommen der Arbeit Tarski 1953.

[2]) Vgl. Tarski 1953.

[3]) Häufig findet man in diesem Zusammenhang auch: T_2 *hat ein Modell in* T_1; vgl. z. B. Kreisel 1955.

[4]) Interessant ist auch die Charakterisierung der Interpretierbarkeit und der relativen Interpretierbarkeit nach Montague und Feferman in Montague 1965. Wir benutzten in dieser Arbeit jedoch die Tarskische Charakterisierung dieser beiden Begriffe. Die in Montague 1965 angedeuteten Schwierigkeiten können hier nicht auftreten, da die Sprachen (im Sinne Montague 1965) unserer Theorien stets endlich sind.

nennt eine Theorie T_2 *schwach interpretierbar* in einer Theorie T_1, wenn T_2 in einer konsistenten Erweiterung von T_1, die dieselben Konstanten wie T_1 hat, interpretierbar ist.

1.8. Es folgt die TARSKIsche *Relativierung der Quantifikatoren.*[1]) Ist T eine Theorie und ist P ein einstelliges Prädikat, so konstruiert TARSKI eine Theorie $(\mathsf{T})^P$, und er spricht in diesem Zusammenhang von einer *Relativierung von* T *auf* P (*Einschränkung der Quantifikatoren von* T *auf* P). Die Konstanten von $(\mathsf{T})^P$ sind genau die Konstanten von T und das Prädikat P. Jedem Ausdruck H von T wird eine Zeichenreihe $\ulcorner(H)^P\urcorner$ zugeordnet, die sich als Ausdruck von $(\mathsf{T})^P$ erweist. Man sagt, $\ulcorner(H)^P\urcorner$ entsteht durch *Relativierung von* H *auf* P, und $\ulcorner(H)^P\urcorner$ heißt die *Relativierte von* H *bzgl.* P. Die Relativierung der Ausdrücke H von T auf P geschieht induktiv:

(1) a) Ist Q ein n-stelliges Prädikat von T und sind $a_1, \ldots, a_n$ Variablen von T, so ist $\ulcorner(Qa_1 \ldots a_n)^P\urcorner$ der Ausdruck $\ulcorner Qa_1 \ldots a_n\urcorner$ von $(\mathsf{T})^P$.
b) $\ulcorner(a = b)^P\urcorner$ ist der Ausdruck $\ulcorner a = b\urcorner$ von $(\mathsf{T})^P$.[2])

(2) Sind H_1, H_2 und $H(a)$ Ausdrücke von T und sind bereits die Ausdrücke $\ulcorner(H_1)^P\urcorner$, $\ulcorner(H_2)^P\urcorner$ und $\ulcorner(H(a))^P\urcorner$ von $(\mathsf{T})^P$ erklärt, so ist:

a) $\ulcorner(\sim H_1)^P\urcorner$ der Ausdruck $\ulcorner\sim(H_1)^P\urcorner$ von $(\mathsf{T})^P$;
b) $\ulcorner((H_1 \wedge H_2))^P\urcorner$ der Ausdruck $\ulcorner((H_1)^P \wedge (H_2)^P)\urcorner$ von $(\mathsf{T})^P$;
c) $\ulcorner((H_1 \vee H_2))^P\urcorner$ der Ausdruck $\ulcorner((H_1)^P \vee (H_2)^P)\urcorner$ von $(\mathsf{T})^P$;
d) $\ulcorner((H_1 \to H_2))^P\urcorner$ der Ausdruck $\ulcorner((H_1)^P \to (H_2)^P)\urcorner$ von $(\mathsf{T})^P$;
e) $\ulcorner((H_1 \leftrightarrow H_2))^P\urcorner$ der Ausdruck $\ulcorner((H_1)^P \leftrightarrow (H_2)^P)\urcorner$ von $(\mathsf{T})^P$;
f) $\ulcorner(\forall aH(a))^P\urcorner$ der Ausdruck $\ulcorner\forall a(Pa \to (H(a))^P)\urcorner$ von $(\mathsf{T})^P$;
g) $\ulcorner(\exists aH(a))^P\urcorner$ der Ausdruck $\ulcorner\exists a(Pa \wedge (H(a))^P)\urcorner$ von $(\mathsf{T})^P$.

Die nicht-logischen Axiome von $(\mathsf{T})^P$ sollen die Relativierungen der nicht-logischen Axiome von T auf P sein und die Aussage $\ulcorner\exists xPx\urcorner$ von $(\mathsf{T})^P$.

Ist T eine beliebige Theorie und ist P ein einstelliges Prädikat, das nicht zu den Konstanten von T gehört, so gilt:[1])

(a) $(\mathsf{T})^P$ ist interpretierbar in T;
(b) $(\mathsf{T})^P$ ist konsistent genau dann, wenn T konsistent ist;
(c) $(\mathsf{T})^P$ ist wesentlich unentscheidbar genau dann, wenn T wesentlich unentscheidbar ist.

Sind T_1 und T_2 zwei Theorien, so heißt T_2 *relativ interpretierbar in* T_1 (bzw. T_2 *relativ schwach interpretierbar in* T_1) genau dann, wenn es ein einstelliges Prädikat P gibt, das nicht zu den Konstanten von T_2 gehört, und wenn $(\mathsf{T}_2)^P$ interpretierbar in T_1 (bzw. $(\mathsf{T}_2)^P$ schwach interpretierbar in T_1).

---

[1]) Vgl. TARSKI 1953.

[2]) Diese Festsetzung ist eigentlich überflüssig, denn wir haben in 1.1. vereinbart, das Gleichheitszeichen als zweistelliges Prädikat aufzufassen, und für Prädikate haben wir die Festsetzung (1) a). Dieser Sachverhalt trifft auch auf die in 1.4. angegebene Wertdefinition zu. Es ist allerdings zu vermerken, daß wir für zweistellige Prädikate P häufig $\ulcorner aPb\urcorner$ anstelle von $\ulcorner Pab\urcorner$ schreiben und daß wir für $\ulcorner\sim = ab\urcorner$ auch $\ulcorner a \neq b\urcorner$ schreiben.

1.9. Sei T eine Theorie, $\mathfrak{M}$ eine Interpretation von T und $H(a_0, \ldots, a_n)$ ein Ausdruck von T. Unter dem von $H(a_0, \ldots, a_n)$ *in* $\mathfrak{M}$ *definierten Attribut* versteht man folgendes $(n+1)$-stellige Attribut $\mathfrak{A}_{H(a_0, \ldots, a_n), \mathfrak{M}}$ über dem Individuenbereich der Interpretation $\mathfrak{M}$ von T: $\mathfrak{A}_{H(a_0, \ldots, a_n), \mathfrak{M}}([\mathfrak{x}_0, \ldots, \mathfrak{x}_n]) = \mathfrak{w}$ genau dann, wenn es eine Belegung f der Variablen von T mit Individuen von $\mathfrak{M}$ gibt mit $f(a_0) = \mathfrak{x}_0$, $\ldots, f(a_n) = \mathfrak{x}_n$ und $\mathfrak{w} = Wert(H(a_0, \ldots, a_n), f, \mathfrak{M})$. [1])

1.10. Sind T_1, T_2 zwei Theorien, so heißt T_2 *relativ konsistent bzgl.* T_1 genau dann, wenn gilt: T_2 hat ein Modell, wenn T_1 ein Modell hat. Aus der Interpretierbarkeit bzw. der relativen Interpretierbarkeit ergibt sich die relative Konsistenz. T_1 und T_2 mögen keine nicht-logischen Konstanten gemeinsam haben, T_2 sei interpretierbar in T_1, T sei eine definitorische Erweiterung von T_1 bzgl. T_2, und $\mathfrak{M}_1$ sei ein Modell von T_1. Von $\mathfrak{M}_1$ ausgehend, erhält man ein Modell der definitorischen Erweiterung T von T_1 bzgl. T_2 und ein Modell $\mathfrak{M}_2$ von T_2. $\mathfrak{M}$ sei folgende auf der Menge der Variablen und der Konstanten von T definierte Funktion: $\mathfrak{M}(Z) = \mathfrak{M}_1(Z)$, wenn Z eine Variable oder Konstante von T_1 ist; $\mathfrak{M}(Z) = \mathfrak{A}_{H(a_0, \ldots, a_n), \mathfrak{M}_1}$, wenn Z ein $(n+1)$-stelliges Prädikat von T_2 ist und wenn $H(a_0, \ldots, a_n)$ der definierende Ausdruck von Z in T ist. $\mathfrak{M}_2$ sei die durch Einschränkung des Vorbereiches von $\mathfrak{M}$ auf die Menge aller Variablen und Konstanten von T_2 entstehende Funktion. Aus der Konstruktion von $\mathfrak{M}$ und von $\mathfrak{M}_2$ ergibt sich, daß $\mathfrak{M}$ ein Modell von T ist und daß $\mathfrak{M}_2$ eine Interpretation von T_2 ist. $\mathfrak{M}_2$ ist sogar ein Modell von T_2. Sei nämlich H ein nicht-logisches Axiom von T_2, so gilt $\vdash_{\mathsf{T}} H$, da T eine Erweiterung von T_2 ist. Nach dem GÖDELschen Vollständigkeitstheorem gilt somit auch $\models_{\mathsf{T}} H$, und daher gilt $ag_{\mathfrak{M}} H$. Also gilt für jede Belegung der Variablen von T mit Individuen von $\mathfrak{M}$: $Wert(H, f, \mathfrak{M}) = W$. Es gilt aber auch $Wert(H, f, \mathfrak{M}_2) = W$ für sämtliche Belegungen f der Variablen von T_2 mit Individuen von $\mathfrak{M}_2$, da $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_2$ in den Argumenten von T_2 nach Konstruktion übereinstimmen. Für alle nichtlogischen Axiome H von T_2 gilt also $ag_{\mathfrak{M}_2} H$, und daher ist $\mathfrak{M}_2$ ein Modell von T_2. Aus diesen Betrachtungen ergibt sich, daß für Theorien T_1, T_2, die keine nicht-logischen Konstanten gemeinsam haben, aus T_2 interpretierbar in T_1 folgt, daß T_2 relativ konsistent bzgl. T_1 ist. Wenn T_1 und T_2 einige gemeinsame Prädikate haben, geht man von den Prädikaten von T_2, wie schon oben erwähnt, durch eine eineindeutige Abbildung (Bijektion) h zu neuen, nicht in T_1 vorkommenden Prädikaten über, ohne die Struktur von T_2 in irgendeiner anderen Hinsicht zu verändern, und man erhält so eine Theorie T_2'. T_1 und T_2' haben keine Prädikate gemeinsam, und daher folgt nach den obigen Betrachtungen aus T_2' interpretierbar in T_1, daß T_2' relativ konsistent bzgl. T_1 ist. Aus einem Modell $\mathfrak{M}_2'$ von T_2' erhält man sofort ein Modell $\mathfrak{M}_2$ von T_2: $\mathfrak{M}_2(Z) = \mathfrak{M}_2'(Z)$, wenn Z eine Variable oder eine logische Konstante von T_2 (und damit auch von T_2') ist; $\mathfrak{M}_2(Z) = \mathfrak{M}_2'(h(Z))$, wenn Z ein Prädikat von T_2 ist. Also gilt in jedem Falle, daß T_2 relativ konsistent bzgl. T_1 ist, wenn T_2 interpretierbar in T_1 ist. Aber auch aus T_2 relativ interpretierbar in T_1 folgt T_2 relativ konsistent bzgl. T_1. Denn wenn P ein einstelliges Prädikat ist, das nicht unter den Konstanten von T_2 vorkommt, und wenn $(\mathsf{T}_2)^P$ interpretierbar in T_1 ist, so gilt nach den obigen

[1]) Vgl. MONTAGUE 1962.

Betrachtungen, daß $(\mathsf{T}_2)^P$ relativ konsistent bzgl. T_1 ist. Da aber nach TARSKI 1953 $(\mathsf{T}_2)^P$ konsistent ist genau dann, wenn T_2 konsistent ist, gilt auch, daß T_2 relativ konsistent bzgl. T_1 ist. Um zu zeigen, daß T_2 relativ konsistent bzgl. T_1 ist, genügt es daher zu beweisen, daß T_2 interpretierbar in T_1 ist oder daß T_2 relativ interpretierbar in T_1 ist. Die in dieser Arbeit angestrebten Beweise der relativen Konsistenz werden mit Hilfe der relativen Interpretierbarkeit geführt.

Diese Einleitung abschließend, möchte ich Herrn Professor Dr. SCHRÖTER und Herrn Professor Dr. KLAUA herzlich für das fördernde Interesse und die zahlreichen wertvollen Hinweise danken. Insbesondere habe ich Herrn Professor Dr. SCHRÖTER für die ausgezeichnete Ausbildung zu danken, die mir in den Vorlesungen und den Seminaren unter seiner Leitung zuteil wurde.

2. Einführung von Prädikaten, speziellen Variablen, ι-Termen und Funktoren

Für eine abkürzende Schreibweise ist es angebracht, in einer Theorie Definitionen zu benutzen.

2.1. Einführung von Prädikaten in einer Theorie.[1]) Jeder Ausdruck $H(a_0, \ldots, a_n)$ einer Theorie T, in dem genau die Variablen $a_0, \ldots, a_n$ frei vorkommen, gestattet es, ein $(n+1)$-stelliges Prädikat P in T einzuführen. Das geschieht durch die Festsetzung:

$$\ulcorner P a_0 \ldots a_n \urcorner =_{\mathrm{Df}} H(a_0, \ldots, a_n).$$

Ist in einer Theorie T ein $(n+1)$-stelliges Prädikat P durch einen Ausdruck $H(a_0, \ldots, a_n)$, in dem genau die Variablen $a_0, \ldots, a_n$ frei vorkommen, eingeführt und ist Q ein einstelliges Prädikat von T oder ein in T eingeführtes einstelliges Prädikat, so ist auch die Relativierte von $H(a_0, \ldots, a_n)$ bzgl. Q, $\ulcorner (H(a_0, \ldots, a_n))^Q \urcorner$, ein Ausdruck von T. Dieser Ausdruck $\ulcorner (H(a_0, \ldots, a_n))^Q \urcorner$ von T dient durch die Festsetzung:

$$\ulcorner (P)^Q a_0 \ldots a_n \urcorner =_{\mathrm{Df}} \ulcorner (H(a_0, \ldots, a_n))^Q \urcorner$$

zur Einführung eines $(n+1)$-stelligen Prädikates $\ulcorner (P)^Q \urcorner$ in T, der *Relativierten von P bzgl. Q*. (Ist P ein Prädikat von T und ist Q ein einstelliges Prädikat von T oder ein in T eingeführtes einstelliges Prädikat, so soll $\ulcorner (P)^Q \urcorner$ einfach P sein.) Sind P und Q $(n+1)$-stellige (primitive[2]) oder eingeführte) Prädikate einer Theorie T, so werden $(n+1)$-stellige Prädikate $\ulcorner (\sim P) \urcorner$, $\ulcorner (P \wedge Q) \urcorner$, $\ulcorner (P \vee Q) \urcorner$, $\ulcorner (P \to Q) \urcorner$, $\ulcorner (P \leftrightarrow Q) \urcorner$ und Aussagen $\ulcorner (\forall P) \urcorner$, $\ulcorner (\exists P) \urcorner$ in T eingeführt durch die Festsetzungen:[3])

$$\begin{aligned}
\ulcorner (\sim P)\, a_0 \ldots a_n \urcorner &=_{\mathrm{Df}} \ulcorner \sim P a_0 \ldots a_n \urcorner,\\
\ulcorner (P \wedge Q)\, a_0 \ldots a_n \urcorner &=_{\mathrm{Df}} \ulcorner (P a_0 \ldots a_n \wedge Q a_0 \ldots a_n) \urcorner,\\
\ulcorner (P \vee Q)\, a_0 \ldots a_n \urcorner &=_{\mathrm{Df}} \ulcorner (P a_0 \ldots a_n \vee Q a_0 \ldots a_n) \urcorner,\\
\ulcorner (P \to Q)\, a_0 \ldots a_n \urcorner &=_{\mathrm{Df}} \ulcorner (P a_0 \ldots a_n \to Q a_0 \ldots a_n) \urcorner,\\
\ulcorner (P \leftrightarrow Q)\, a_0 \ldots a_n \urcorner &=_{\mathrm{Df}} \ulcorner (P a_0 \ldots a_n \leftrightarrow Q a_0 \ldots a_n) \urcorner,\\
\ulcorner (\forall P) \urcorner &=_{\mathrm{Df}} \ulcorner \forall a_0 \ldots \forall a_n P a_0 \ldots a_n \urcorner,\\
\ulcorner (\exists P) \urcorner &=_{\mathrm{Df}} \ulcorner \exists a_0 \ldots \exists a_n P a_0 \ldots a_n \urcorner.
\end{aligned}$$

---

[1]) Vgl. GÖDEL 1940 und SHEPHERDSON 1951. Die Einführung von Prädikaten hängt eng mit QUINES *virtual theory of classes and relations* zusammen, vgl. QUINE 1963.

[2]) Die Prädikate einer Theorie nennt man im Unterschied zu den eingeführten Prädikaten auch *primitive* Prädikate.

[3]) Vgl. CARNAP 1960.

2.2. Einführung von speziellen Variablen in einer Theorie.[1]) Ist P ein einstelliges (primitives oder eingeführtes) Prädikat einer Theorie T, so ist in T die P-Variable $\ulcorner(a)^P\urcorner$, die *Relativierte von a bzgl. P*, eingeführt durch die Festsetzungen:

$$\ulcorner\forall(a)^P H(a/(a)^P)\urcorner =_{\mathrm{Df}} \ulcorner\forall a(Pa \to H(a))\urcorner,$$
$$\ulcorner\exists(a)^P H(a/(a)^P)\urcorner =_{\mathrm{Df}} \ulcorner\exists a(Pa \wedge H(a))\urcorner.^2)$$

(Falls das einstellige Prädikat P durch einen Ausdruck $H_0(b)$ in T eingeführt wurde, komme die Variable a nicht gebunden in $H_0(b)$ vor; kurz: a sei eine *neue* Variable.)

Sind P und Q einstellige (primitive oder eingeführte) Prädikate einer Theorie T, so verstehen wir unter der Relativierten einer P-Variablen $\ulcorner(a)^P\urcorner$ bzgl. Q die durch die Festsetzungen:

$$\ulcorner\forall((a)^P)^Q(H(a))^Q a/((a)^P)^Q\urcorner =_{\mathrm{Df}} \ulcorner(\forall(a)^P H(a/(a)^P))^Q\urcorner,$$
$$\ulcorner\exists((a)^P)^Q(H(a))^Q a/((a)^P)^Q\urcorner =_{\mathrm{Df}} \ulcorner(\exists(a)^P H(a/(a)^P))^Q\urcorner$$

eingeführte Variable $\ulcorner((a)^P)^Q\urcorner$. Nach diesen Festsetzungen ist die Relativierte einer P-Variablen bzgl. Q nur für die Relativierten der Ausdrücke von T bzgl. Q eingeführt. Die Relativierten der P-Variablen bzgl. Q kann man im Bereich der Relativierten der Ausdrücke von T bzgl. Q auch als $\ulcorner(Q \wedge (P)^Q)\urcorner$-Variablen auffassen, denn in T ist für jeden Ausdruck $H(a)$ beweisbar:

$$\ulcorner(\forall((a)^P)^Q(H(a))^Q a/((a)^P)^Q \leftrightarrow \forall(a)^{(Q\wedge(P)^Q)}(H(a))^Q a/(a)^{(Q\wedge(P)^Q)})\urcorner,$$
$$\ulcorner(\exists((a)^P)^Q(H(a))^Q a/((a)^P)^Q \leftrightarrow \exists(a)^{(Q\wedge(P)^Q)}(H(a))^Q a/(a)^{(Q\wedge(P)^Q)})\urcorner.$$

2.3. Einführung von ι-Termen in einer Theorie.[3]) Unter den *Termen* einer Theorie T versteht man genau die folgenden Zeichenreihen:

(a) die Individuenvariablen von T,

(b) für jeden Ausdruck $H(a)$ von T die Zeichenreihe $\ulcorner\iota a H(a)\urcorner$ (ι-Term).

Bereits in der Einleitung hatten wir verabredet, das Zeichen 'T' (evtl. mit Indizes) als syntaktische Variable für Terme zu benutzen. ι-Terme werden durch sogenannte *Kontextdefinitionen* in einer Theorie eingeführt. Wir benutzen die folgenden Festsetzungen zur Einführung von ι-Termen:

$$\ulcorner Pa_0a_1\ldots a_{n-2}a_{n-1}\iota a H(a)\urcorner =_{\mathrm{Df}} \ulcorner\exists a_n(a_n = \iota a H(a) \wedge Pa_0a_1\ldots a_{n-2}a_{n-1}a_n)\urcorner,$$
$$\ulcorner Pa_0a_1\ldots a_{n-2}\iota a H(a)T_n\urcorner =_{\mathrm{Df}} \ulcorner\exists a_{n-1}(a_{n-1} = \iota a H(a) \wedge \wedge Pa_0a_1\ldots a_{n-2}a_{n-1}T_n)\urcorner,$$

. . . . . .

$$\ulcorner P\iota a H(a)T_1\ldots T_{n-2}T_{n-1}T_n\urcorner =_{\mathrm{Df}} \ulcorner\exists a_0(a_0 = \iota a H(a) \wedge Pa_0T_1\ldots T_{n-1}T_n)\urcorner,$$
$$\ulcorner b = \iota a H(a)\urcorner =_{\mathrm{Df}} \ulcorner\exists c(b = c \wedge \forall a(H(a) \leftrightarrow c = a))\urcorner,$$

---

[1]) Vgl. GÖDEL 1940 und SHEPHERDSON 1951.

[2]) $\ulcorner(H)\,Z_1/Z_1'\ldots Z_n/Z_n'\urcorner$ sei die Zeichenreihe, die aus dem Ausdruck H dadurch entsteht, daß für $Z_1,\ldots,Z_n$ bzw. $Z_1',\ldots,Z_n'$ simultan substituiert wird. $H(a_1/Z_1,\ldots,a_n/Z_n)$ sei insbesondere erklärt als $\ulcorner(H(a_1,\ldots,a_n))\,a_1/Z_1\ldots a_n/Z_n\urcorner$.

[3]) Vgl. QUINE 1951, SCHRÖTER 1956, CARNAP 1956 und 1960.

dabei sei P ein $(n+1)$-stelliges (primitives oder eingeführtes) Prädikat der zugrundeliegenden Theorie T (in der ersten Definition jedoch nicht das Prädikat '='), und $a_0, \ldots, a_n, c$ seien jeweils neue Variablen.[1]) Man beachte den Unterschied zwischen $\ulcorner \sim P_1 \iota a H(a) \urcorner$ und $\ulcorner (\sim P_1) \iota a H(a) \urcorner$. $\ulcorner \sim P_1 \iota a H(a) \urcorner$ ist ein Ausdruck der Form $\ulcorner \sim \exists b (b = \iota a H(a) \wedge P_1 b) \urcorner$, $\ulcorner (\sim P_1) \iota a H(a) \urcorner$ ist dagegen ein Ausdruck der Form $\ulcorner \exists b (b = \iota a H(a) \wedge \sim P_1 b) \urcorner$. Ist Q ein einstelliges (primitives oder eingeführtes) Prädikat einer Theorie T, so wollen wir auch von der Relativierten eines ι-Termes T bzgl. Q, $\ulcorner (T)^Q \urcorner$, sprechen, und zwar im Sinne der folgenden Vereinbarungen:

$$\ulcorner P a_0 a_1 \ldots a_{n-2} a_{n-1} (\iota a H(a))^Q \urcorner =_{\mathrm{Df}} \ulcorner \exists a_n (a_n = (\iota a H(a))^Q \wedge \wedge P a_0 a_1 \ldots a_{n-2} a_{n-1} a_n) \urcorner,$$

$$\ulcorner P a_0 a_1 \ldots a_{n-2} (\iota a H(a))^Q T_n \urcorner =_{\mathrm{Df}} \ulcorner \exists a_{n-1} (a_{n-1} = (\iota a H(a))^Q \wedge \wedge P a_0 a_1 \ldots a_{n-2} a_{n-1} T_n) \urcorner,$$

. . . . . .

$$\ulcorner P (\iota a H(a))^Q T_1 \ldots T_{n-2} T_{n-1} T_n \urcorner =_{\mathrm{Df}} \ulcorner \exists a_0 (a_0 = (\iota a H(a))^Q \wedge \wedge P a_0 T_1 \ldots T_{n-2} T_{n-1} T_n) \urcorner,$$

$$\ulcorner b = (\iota a H(a))^Q \urcorner =_{\mathrm{Df}} \ulcorner (b = \iota a H(a))^Q \urcorner,$$

dabei sei P ein $(n+1)$-stelliges (primitives oder eingeführtes) Prädikat von T (in der ersten Definition jedoch nicht das Gleichheitszeichen), $T_1, \ldots, T_n$ seien Terme von T oder Relativierte von ι-Termen von T, und $a_0, \ldots, a_n$ seien neue Variablen.

Wir bemerken:

(a) Ist $H(a)$ ein Ausdruck einer Theorie T und ist Q ein einstelliges primitives oder eingeführtes Prädikat von T, so gilt: $\vdash_{\mathsf{T}} \ulcorner \forall b (b = (\iota a H(a))^Q \leftrightarrow b = \iota a (Q a \wedge \wedge (H(a))^Q)) \urcorner$ und $\vdash_{\mathsf{T}} \ulcorner (\exists b\, b = (\iota a H(a))^Q \rightarrow (\iota a H(a))^Q = \iota a (Q a \wedge (H(a))^Q)) \urcorner$.

(b) Seien $H_1(a)$ und $H_2(b)$ Ausdrücke einer Theorie T. Es sei zugelassen, daß die Variable a gleich der Variablen b sein kann. Steht die Variable a in einem Wirkungsbereich einer Variablen d in $H_1(a)$, so komme die Variable d nicht in $\ulcorner c = \iota b H_2(b) \urcorner$ vor. Die Substitution von $\ulcorner \iota b H_2(b) \urcorner$ für a in $H_1(a)$ sei ohne Variablenkonfusion und ohne Variablenkollision möglich. Unter diesen Voraussetzungen gilt: $\vdash_{\mathsf{T}} \ulcorner \exists c \forall b (H_2(b) \leftrightarrow c = b) \rightarrow (H_1(a/\iota b H_2(b)) \leftrightarrow \exists c (c = \iota b H_2(b) \wedge \wedge H_1(a/c))) \urcorner$ (c neue Variable). Daraus erhält man, daß für jedes $(n+1)$-stellige primitive oder eingeführte Prädikat P einer Theorie T bei Erfülltsein der obigen Voraussetzungen gilt:
$\vdash_{\mathsf{T}} \ulcorner \exists c \forall b (H_2(b) \leftrightarrow c = b) \rightarrow$
$((P a_0 \ldots a_{i-1} a_i a_{i+1} \ldots a_n) a_i / \iota b H_2(b) \leftrightarrow P a_0 \ldots a_{i-1} \iota b H_2(b) a_{i+1} \ldots a_n) \urcorner$.

Beweis.

(a) Die Behauptungen ergeben sich aus der Einführung der ι-Terme und aus der Einführung der Relativierten von ι-Termen.

---

[1]) Wenn man eindeutig festgelegte neue Variablen wünscht, kann man eine Wohlordnung der Variablen voraussetzen und dann jeweils die erste neue Variable nehmen.

(b) Der Beweis verläuft induktiv über die Ausdrucksstufe von $H_1(a)$.

(1a) $H_1(a)$ sei von der Form $\ulcorner a_0 = a \urcorner$. Dann ist $H_1(a/\iota b H_2(b))$ $\ulcorner a_0 = \iota b H_2(b) \urcorner$, d. h. $\ulcorner \exists c(a_0 = c \wedge \forall b(H_2(b) \leftrightarrow c = b)) \urcorner$. $\ulcorner \exists c(c = \iota b H_2(b) \wedge H_1(a/c)) \urcorner$ ist von der Form $\ulcorner \exists c(\exists c_0(c = c_0 \wedge \forall b(H_2(b) \leftrightarrow c_0 = b)) \wedge a_0 = c) \urcorner$. Die Ausdrücke $\exists c(a_0 = c \wedge \forall b(H_2(b) \leftrightarrow c = b))\urcorner$ und $\ulcorner \exists c(\exists c_0(c = c_0 \wedge \forall b(H_2(b) \leftrightarrow c_0 = b)) \wedge \wedge a_0 = c) \urcorner$ sind äquivalent.

(1b) Ist $H_1(a)$ prädikativ (aber nicht von der Form $\ulcorner a_0 = a \urcorner$), so ergibt sich die Behauptung sofort aus den Kontextdefinitionen zur Einführung der ι-Terme.

(2a) Sei $H_1(a)$ von der Form $\ulcorner \sim H(a) \urcorner$. Nach Induktionsannahme gilt:
$\vdash_{\mathsf{T}} \ulcorner \exists c \forall b(H_2(b) \leftrightarrow c = b) \rightarrow (H(a/\iota b H_2(b)) \leftrightarrow \exists c(c = \iota b H_2(b) \wedge H(a/c))) \urcorner$.
Wegen der Prämisse $\ulcorner \exists c \forall b(H_2(b) \leftrightarrow c = b) \urcorner$ gilt auch:
$\vdash_{\mathsf{T}} \ulcorner \exists c \forall b(H_2(b) \leftrightarrow c = b) \rightarrow (\sim H(a/\iota b H_2(b)) \leftrightarrow \exists c(c = \iota b H_2(b) \wedge \sim H(a/c))) \urcorner$.

(2b) Sei $H_1(a)$ von der Form $\ulcorner (H_{11}(a) \wedge H_{12}(a)) \urcorner$. Nach Induktionsannahme gilt:
$\vdash_{\mathsf{T}} \ulcorner \exists c \forall b(H_2(b) \leftrightarrow c = b) \rightarrow (H_{11}(a/\iota b H_2(b)) \leftrightarrow \exists c_1(c_1 = \iota b H_2(b) \wedge H_{11}(a/c))) \urcorner$ und
$\vdash_{\mathsf{T}} \ulcorner \exists c \forall b(H_2(b) \leftrightarrow c = b) \rightarrow (H_{12}(a/\iota b H_2(b)) \leftrightarrow \exists c_2(c_2 = \iota b H_2(b) \wedge H_{12}(a/c))) \urcorner$.
Zusammenfassend gilt also auch die Behauptung für $H_1(a)$.

(2c) Sei $H_1(a)$ von der Form $\ulcorner (H_{11} \wedge H_{12}(a)) \urcorner$, wobei a nicht in H_{11} vorkommt. Nach Induktionsannahme gilt: $\vdash_{\mathsf{T}} \ulcorner \exists c \forall b(H_2(b) \leftrightarrow c = b) \rightarrow (H_{12}(a/\iota b H_2(b)) \leftrightarrow \exists c(c = \iota b H_2(b) \wedge H_{12}(a/c))) \urcorner$, also gilt: $\vdash_{\mathsf{T}} \ulcorner \exists c \forall b(H_2(b) \leftrightarrow c = b) \rightarrow (H_{11} \wedge \wedge H_{12}(a/\iota b H_2(b)) \leftrightarrow H_{11} \wedge \exists c(c = \iota b H_2(b) \wedge H_{12}(a/c))) \urcorner$, und somit gilt nach den Theoremen der Quantifikatorenverschiebung: $\vdash_{\mathsf{T}} \ulcorner \exists c \forall b(H_2(b) \leftrightarrow c = b) \rightarrow \rightarrow (H_1(a/\iota b H_2(b)) \leftrightarrow \exists c(c = \iota b H_2(b) \wedge H_1(a/c))) \urcorner$.

(2d) Ist $H_1(a)$ von der Form $\ulcorner (H_{11}(a) \wedge H_{12}) \urcorner$, wobei a nicht in H_{12} vorkommt, so verfahren wir analog (2c).

(2e) Sei $H_1(a)$ von der Form $\ulcorner \exists d H(a, d) \urcorner$. Nach Induktionsannahme gilt:
$\vdash_{\mathsf{T}} \ulcorner \exists c \forall b(H_2(b) \leftrightarrow c = b) \rightarrow (H(a/\iota b H_2(b), d) \leftrightarrow \exists c(c = \iota b H_2(b) \wedge H(a/c, d))) \urcorner$,
und daher gilt:
$\vdash_{\mathsf{T}} \ulcorner \exists c \forall b(H_2(b) \leftrightarrow c = b) \rightarrow$
$\rightarrow (\exists d H(a/\iota b H_2(b), d) \leftrightarrow \exists d \exists c(c = \iota b H_2(b) \wedge H(a/c, d))) \urcorner$.
Da d nach Voraussetzung nicht in $\ulcorner c = \iota b H_2(b) \urcorner$ vorkommt, gilt nach den Theoremen der Quantifikatorenvertauschung und -verschiebung:
$\vdash_{\mathsf{T}} \ulcorner \exists c \forall b(H_2(b) \leftrightarrow c = b) \rightarrow$
$\rightarrow (\exists d H(a/\iota b H_2(b), d) \leftrightarrow \exists c(c = \iota b H_2(b) \wedge \exists d H(a/c, d))) \urcorner$.

(3) Diese Beweisschritte genügen, da die logischen Konstanten '$\vee$', '$\rightarrow$', '$\leftrightarrow$' und '$\forall$' durch die logischen Konstanten '$\sim$', '$\wedge$' und '$\exists$' ausdrückbar sind.

2.4. Einführung von Funktoren in einer Theorie.[1]) Ist $H(a_0, a_1 \ldots, a_n)$ ein Ausdruck einer Theorie T, in dem genau die Variablen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ frei vorkommen, und ist in T die *Unizitätsbedingung* $\ulcorner \forall a_1 \ldots \forall a_n \exists b \forall a_0(H(a_0, a_1, \ldots, a_n) \leftrightarrow b = a_0) \urcorner$ beweisbar, so ist durch die Festsetzung

$$\ulcorner F(a_1, \ldots, a_n) \urcorner =_{\mathrm{Df}} \ulcorner \iota a_0 H(a_0, a_1, \ldots, a_n) \urcorner$$

ein n-stelliger Funktor F in T eingeführt. (Nullstellige Funktoren sind Individuenkonstanten.) Ist $H(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ ein Ausdruck einer Theorie T, in dem genau die

[1]) Vgl. Gödel 1940 und Shepherdson 1951.

Variablen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ frei vorkommen, ist P ein einstelliges (primitives oder eingeführtes) Prädikat von T und ist in T die *eingeschränkte Unizitätsbedingung*

$$\ulcorner \forall a_1 \ldots \forall a_n (Pa_1 \wedge \cdots \wedge Pa_n \rightarrow \exists b \forall a_0 (H(a_0, a_1, \ldots, a_n) \leftrightarrow b = a_0)) \urcorner$$

beweisbar, so ist durch die Festsetzung

$$\ulcorner F(a_1, \ldots, a_n) \urcorner =_{\mathrm{Df}} \ulcorner \iota a_0 (Pa_1 \wedge \cdots \wedge Pa_n \wedge H(a_0, a_1, \ldots, a_n)) \urcorner$$

ein n-stelliger P-Funktor F in T eingeführt. Ist in einer Theorie T ein n-stelliger Funktor F durch die Festsetzung $\ulcorner F(a_1, \ldots, a_n) \urcorner =_{\mathrm{Df}} \ulcorner \iota a_0 H(a_0, a_1, \ldots, a_n) \urcorner$ eingeführt, ist T' eine Theorie, in der ein einstelliges (primitives oder eingeführtes) Prädikat Q und die in $H(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ vorkommenden Prädikate von T vorkommen, und ist in T' $\ulcorner (\forall a_1 \ldots \forall a_n \exists b \forall a_0 (H(a_0, a_1, \ldots, a_n) \leftrightarrow b = a_0))^Q \urcorner$ beweisbar, so ist durch die Festsetzung

$$\ulcorner (F)^Q (a_1, \ldots, a_n) \urcorner =_{\mathrm{Df}} \ulcorner \iota a_0 (Qa_0 \wedge \cdots \wedge Qa_n \wedge (H(a_0, a_1, \ldots, a_n))^Q) \urcorner$$

in T' ein n-stelliger Q-Funktor $\ulcorner (F)^Q \urcorner$ eingeführt, die *Relativierte von F bzgl. Q* in T'. Ist in einer Theorie T ein n-stelliger P-Funktor F durch die Festsetzung

$$\ulcorner F(a_1, \ldots, a_n) \urcorner =_{\mathrm{Df}} \ulcorner \iota a_0 (Pa_1 \wedge \cdots \wedge Pa_n \wedge H(a_0, a_1, \ldots, a_n)) \urcorner$$

eingeführt, ist T' eine Theorie, in der ein einstelliges (primitives oder eingeführtes) Prädikat Q und die in $H(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ vorkommenden Prädikate von T vorkommen, und ist in T' $\ulcorner (\forall a_1 \ldots \forall a_n (Pa_1 \wedge \cdots \wedge Pa_n \rightarrow \exists b \forall a_0 (H(a_0, a_1, \ldots, a_n) \leftrightarrow b = a_0)))^Q \urcorner$ beweisbar, so ist durch die Festsetzung $\ulcorner (F)^Q (a_1, \ldots, a_n) \urcorner =_{\mathrm{Df}} \ulcorner \iota a_0 (Qa_0 \wedge (Q \wedge (P)^Q)\, a_1 \wedge \cdots \wedge (Q \wedge (P)^Q)\, a_n \wedge (H(a_0, a_1, \ldots, a_n))^Q) \urcorner$ in T' ein n-stelliger $\ulcorner (Q \wedge (P)^Q) \urcorner$-Funktor $\ulcorner (F)^Q \urcorner$, die *Relativierte von F bzgl. Q in T'*, eingeführt. Den Gebrauch von ι-Termen und von Relativierten von ι-Termen im Zusammenhang mit Funktoren und von P-Funktoren regeln wir ähnlich dem Gebrauch dieser Terme im Zusammenhang mit (primitiven oder eingeführten) Prädikaten. Ist F ein n-stelliger Funktor, der in einer Theorie T durch den Ausdruck $H(a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ eingeführt wurde, so sei

$$\ulcorner F(a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, \iota b_n H_n(b_n)) \urcorner$$
$$=_{\mathrm{Df}} \ulcorner \iota a_0 \exists a_n (a_n = \iota b_n H_n(b_n) \wedge H(a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)) \urcorner,$$

$$\ulcorner F(a_1, \ldots, a_{n-2}, \iota b_{n-1} H_{n-1}(b_{n-1}), a_n) \urcorner$$
$$=_{\mathrm{Df}} \ulcorner \iota a_0 \exists a_{n-1} (a_{n-1} = \iota b_{n-1} H_{n-1}(b_{n-1}) \wedge H(a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)) \urcorner,$$

$$\ulcorner F(a_1, \ldots, a_{n-2}, \iota b_{n-1} H_{n-1}(b_{n-1}), \iota b_n H_n(b_n)) \urcorner$$
$$=_{\mathrm{Df}} \ulcorner \iota a_0 \exists a_{n-1} \exists a_n (a_{n-1} = \iota b_{n-1} H_{n-1}(b_{n-1}) \wedge a_n = \iota b_n H_n(b_n) \wedge$$
$$\wedge H(a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)) \urcorner,$$

. . . . . .

$$\ulcorner F(\iota b_1 H_1(b_1), \ldots, \iota b_n H_n(b_n)) \urcorner$$
$$=_{\mathrm{Df}} \ulcorner \iota a_0 \exists a_1 \ldots \exists a_n (a_1 = \iota b_1 H_1(b_1) \wedge \cdots \wedge a_n = \iota b_n H_n(b_n) \wedge$$
$$\wedge H(a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)) \urcorner.$$

($a_1, \ldots, a_n$ seien neue Variablen. a_0 komme nicht in den Ausdrücken $H_1(b_1)$, ..., $H_n(b_n)$ vor.)

Ist F ein durch $H(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ in einer Theorie T eingeführter n-stelliger P-Funktor, so sei

$$\ulcorner F(a_1, \ldots, a_{n-1}, \iota b_n H_n(b_n))\urcorner$$
$$=_{\mathrm{Df}} \ulcorner \iota a_0 \exists a_n (a_n = \iota b_n H_n(b_n) \wedge Pa_1 \wedge \cdots \wedge Pa_n \wedge H(a_0, a_1, \ldots, a_n))\urcorner;$$

. . . . . .

$$\ulcorner F(\iota b_1 H_1(b_1), \ldots, \iota b_n H_n(b_n))\urcorner$$
$$=_{\mathrm{Df}} \ulcorner \iota a_0 \exists a_1 \ldots \exists a_n (a_1 = \iota b_1 H_1(b_1) \wedge \cdots \wedge a_n = \iota b_n H_n(b_n) \wedge$$
$$\wedge Pa_1 \wedge \cdots \wedge Pa_n \wedge H(a_0, a_1, \ldots, a_n))\urcorner.$$

($a_1, \ldots, a_n$ seien neue Variablen. a_0 komme nicht in den Ausdrücken $H_1(b_1), \ldots, H_n(b_n)$ vor.)

Analog verfahren wir beim Gebrauch der Relativierten von ι-Termen.

3. Das axiomatische System der Mengenlehre nach Gödel

3.1. Die Gödelsche Mengenlehre, die ausführlich in der Arbeit Gödel 1940 beschrieben ist, benutzt zwei Arten von Klassen, die Mengen und die Unmengen (*proper classes*). Im Unterschied zur Bernaysschen Mengenlehre[1]) tritt aber nur eine Elementbeziehung auf. Die Mengen können Mengen als Elemente haben, und sie dienen als Elemente von Klassen. Die Unmengen haben Mengen als Elemente, sie dienen aber nicht als Elemente von Klassen. Dadurch werden die üblichen Antinomien vermieden. Urelemente (von der leeren Menge verschiedene Objekte, die keine Elemente haben) sind in der Gödelschen Mengenlehre nicht eingeführt. Die Mengen sind die eigentlichen Objekte der Betrachtung, die Unmengen spielen die Rolle von uneigentlichen Objekten, d. h. von Objekten, die in eingeschränkter Weise benutzt werden (nämlich nicht als Elemente). Gödel fordert (Axiom A1), daß jede Menge eine Klasse ist. Da wir außer Klassen keine Objekte zu betrachten beabsichtigen und da wir nur eine Sorte von Variablen (Variablen für Klassen) benutzen wollen, ist das von Gödel benutzte Prädikat '$\mathfrak{Cl}$' und das Axiom A1 bei der hier angestrebten Formulierung der Gödelschen Mengenlehre überflüssig. Für unsere Betrachtungen ist die Gödelsche Mengenlehre eine Theorie G im Sinne der Einleitung, eine axiomatische Theorie mit Standardformalisierung, deren nicht-logische Konstanten endlich viele Prädikate sind. 'M' und 'ε' sind die Prädikate der Theorie G. 'M' ist ein einstelliges Prädikat (Zeichen für die Eigenschaft, Menge zu sein), während 'ε' ein zweistelliges Prädikat ist (Zeichen für die Elementbeziehung). Auf das Prädikat 'M' könnten wir auch noch verzichten.

3.2. Im folgenden werden die nicht-logischen Axiome von G und einige wichtige Definitionen aufgeführt, damit ist dann G als eine Theorie im Sinne der Einleitung erklärt. Die nicht-logischen Axiome hat Gödel in fünf Gruppen eingeteilt, in die Gruppen A, B, C, D, E.

---

[1]) Vgl. Bernays 1937. In Bernays 1958 dagegen kommt auch nur eine Elementbeziehung vor.

Gruppe A

1. Entfällt nach 3.1,

2. '$\forall x \forall y (x \varepsilon y \rightarrow Mx)$',

3. '$\forall x \forall y ((u)\,(u \varepsilon x \leftrightarrow u \varepsilon y) \rightarrow x = y)$', [1])

4. '$(x)\,(y)\,(\exists z)\,(u)\,(u \varepsilon z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$'.

Axiom A2 besagt, daß die Elemente der Klassen Mengen sind. Axiom A3, das Extensionalitätsaxiom, besagt, daß zwei Klassen identisch sind, falls sie in den Elementen übereinstimmen. Axiom A4, das Paarungsaxiom, gestattet es zu je zwei Mengen eine Menge zu bilden, deren Elemente genau die zwei gegebenen Mengen sind.

Mit Hilfe der folgenden Definitionen können wir die restlichen Axiome der Theorie G formulieren.

[G/1] [2]) '$\mathfrak{Pr} x$' $=_{\mathrm{Df}}$ '$\sim M x$' („*x ist Unmenge*"),

[G/1.2] '$x \subseteqq y$' $=_{\mathrm{Df}}$ '$(u)\,(u \varepsilon x \rightarrow u \varepsilon y)$' („*x ist Teilklasse von y*"),

'$x \subset y$' $=_{\mathrm{Df}}$ '$(x \subseteqq y \wedge \sim x = y)$' („*x ist echte Teilklasse von y*"),

[G/1.22] '$\mathfrak{Em} x$' $=_{\mathrm{Df}}$ '$(u) \sim u \varepsilon x$' („*x ist leer*"),

[G/1.23] '$\mathfrak{Ex} xy$' $=_{\mathrm{Df}}$ '$(u) \sim (u \varepsilon x \wedge u \varepsilon y)$' („*x und y sind paarweise disjunkt*"),

[G/3.1] '$\{x, y\}$' $=_{\mathrm{Df}}$ '$\iota z (u)\,(u \varepsilon z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$'
('$\{\}_2 (x, y)$' [3]); „*die Paarmenge von x und y*"),

[G/3.11] '$\{x\}$' $=_{\mathrm{Df}}$ '$\{x, x\}$' ('$\{\}_1 (x)$' „*die Einermenge von x*"),

[G/3.12] '$\langle x, y \rangle$' $=_{\mathrm{Df}}$ '$\{\{x\}, \{x, y\}\}$'
('$\langle\rangle_2 (x, y)$'; „*das geordnete Paar von x und y*"),

[G/3.13] '$\langle x, y, z \rangle$' $=_{\mathrm{Df}}$ '$\langle x, \langle y, z \rangle\rangle$'
('$\langle\rangle_3 (x, y, z)$'; „*das 3-Tupel von x, y und z*"),

[G/1.3] '$\mathfrak{Un} x$' $=_{\mathrm{Df}}$ '$(u)\,(v)\,(w)\,(\langle v, u \rangle \varepsilon x \wedge \langle w, u \rangle \varepsilon x \rightarrow v = w)$' („*x ist einwertig*").

Gruppe B

1. '$\exists r (x)\,(y)\,(\langle x, y \rangle \varepsilon r \leftrightarrow x \varepsilon y)$',

2. '$\forall r \forall s \exists t (u)\,(u \varepsilon t \leftrightarrow u \varepsilon r \wedge u \varepsilon s)$',

3. '$\forall r \exists s (u)\,(u \varepsilon s \leftrightarrow \sim u \varepsilon r)$',

---

[1]) Im Sinne einer abkürzenden und an die Arbeit GÖDEL 1940 angepaßten Schreibweise wird vereinbart:

$$\ulcorner (a)\, H(a) \urcorner =_{\mathrm{Df}} \ulcorner \forall (a)^M\, H(a/(a)^M) \urcorner,$$

$$\ulcorner (\exists a)\, H(a) \urcorner =_{\mathrm{Df}} \ulcorner \exists (a)^M\, H(a/(a)^M) \urcorner,$$

$$\ulcorner (E!a)\, H(a) \urcorner =_{\mathrm{Df}} \ulcorner \exists b\, \forall a (H(a) \leftrightarrow b = a) \urcorner$$

(b sei dabei eine nicht in $H(a)$ vorkommende Variable).

[2]) Mit '[G/1]' wollen wir auf Punkt 1 der Arbeit GÖDEL 1940 hinweisen.

[3]) Um besser zu erkennen, daß durch diese Festsetzung in G ein zweistelliger Funktor eingeführt ist, schreiben wir auch '$\{\}_2 (x, y)$' anstelle von '$\{x, y\}$'.

4. '$\forall r \exists s(x)\ (x \varepsilon s \leftrightarrow (\exists y)\ \langle y, x\rangle\ \varepsilon r)$',
5. '$\forall r \exists s(x)\ (y)\ (\langle y, x\rangle\ \varepsilon s \leftrightarrow x \varepsilon r)$',
6. '$\forall r \exists s(x)\ (y)\ (\langle x, y\rangle\ \varepsilon s \leftrightarrow \langle y, x\rangle\ \varepsilon r)$'.
7. '$\forall r \exists s(x)\ (y)\ (z)\ (\langle x, y, z\rangle\ \varepsilon s \leftrightarrow \langle y, z, x\rangle\ \varepsilon r)$',
8. '$\forall r \exists s(x)\ (y)\ (z)\ (\langle x, y, z\rangle\ \varepsilon s \leftrightarrow \langle x, z, y\rangle\ \varepsilon r)$'.

Die Axiome der Gruppe B sichern die Existenz von Klassen. Das Axiom B1, das Axiom der Elementbeziehung, sichert die Existenz der Klasse, die die Elementbeziehung repräsentiert. Das Axiom B2 gestattet es, zu je zwei Klassen x und y die Durchschnittsklasse $x \cdot y$ zu bilden. Das Axiom B3 dient zur Bildung des Komplementes $-x$ einer jeden Klasse x. Aus dem Durchschnittsaxiom B2 und aus dem Komplementsaxiom B3 folgt die Existenz der Allklasse V und der Nullklasse 0. Das Axiom B4 sichert die Existenz des Vorbereiches (*domain*) $\mathfrak{D}(x)$ einer jeden Klasse x. Das Axiom B5 nennt GÖDEL das Axiom des direkten Produktes: es sichert für jede Klasse x die Existenz der Klasse $V \times x$. Von den Inversionsaxiomen, den Axiomen B6, B7 und B8, ist das Axiom B6 entbehrlich[1]).

Gruppe C

1. '$(\exists r)\ (\sim \mathfrak{Em} r \wedge (x)\ (x \varepsilon r \rightarrow (\exists y)\ (y \varepsilon r \wedge x \subset y)))$',
2. '$(x)\ (\exists y)\ (u)\ (v)\ (u \varepsilon v \wedge v \varepsilon x \rightarrow u \varepsilon y)$',
3. '$(x)\ (\exists y)\ (u)\ (u \subseteq x \rightarrow u \varepsilon y)$',
4. '$(x)\ \forall r(\mathfrak{Un} r \rightarrow (\exists y)\ (u \varepsilon y \leftrightarrow (\exists v)\ (v \varepsilon x \wedge \langle u, v\rangle\ \varepsilon r)))$'.

Die Axiome der Gruppe C sichern die Existenz von Mengen. Das Axiom C1, das Unendlichkeitsaxiom, gewährleistet die Existenz einer nicht-leeren Menge, die zu jedem Element eine echte Obermenge als Element enthält. Das Axiom C2 sichert zu jeder Menge x die Existenz einer Menge, zu deren Elementen alle Elemente der Elemente von x gehören. Axiom C3 sichert zu jeder Menge x die Existenz einer Menge, die sämtliche Teilmengen von x als Elemente hat. Das Axiom C4, das Ersetzungsaxiom, besagt, daß zu jeder Menge x und zu jeder einwertigen Klasse r es eine Menge y gibt, deren Elemente genau die Mengen u sind, für die es eine Menge v gibt, so daß $\langle u, v\rangle$ Element von r ist und v Element von x.

Axiom D '$\forall r(\sim \mathfrak{Em} r \rightarrow (\exists u)\ (u \varepsilon r \wedge \mathfrak{Ex} u r))$'.

Das Axiom D, das Fundierungsaxiom, besagt, daß jede nicht-leere Klasse eine Menge als Element hat, die zu der Klasse disjunkt ist.

Axiom E '$\exists r(\mathfrak{Un} r \wedge (x)\ (\sim \mathfrak{Em} x \rightarrow (\exists y)\ (y \varepsilon x \wedge \langle y, x\rangle\ \varepsilon r)))$.

Das Axiom E, das Auswahlaxiom, liefert eine einwertige Klasse, die es gestattet, simultan aus jeder nicht-leeren Menge ein Element auszuwählen.

3.3. Zur Formulierung eines wichtigen Metatheorems, des *General Existence Theorem*, führte GÖDEL den Begriff der *primitive propositional function* (*ppf*) ein[2]). Dieser Begriff wird induktiv definiert:

(1) '$a \varepsilon b$', '$a \varepsilon \iota b H_2(b)$', '$\iota b H_2(b) \varepsilon a$' und '$\iota a H_1(a) \varepsilon \iota b H_2(b)$' sind *ppf*, falls die Unizitätsbedingungen für die Ausdrücke $H_1(a)$ und $H_2(b)$ in G beweisbar sind und falls a die einzige freie Variable von $H_1(a)$ ist und falls b die einzige freie Variable von $H_2(b)$ ist.

---

[1]) Vgl. MARKOW 1948.
[2]) Vgl. GÖDEL 1940.

(2) Wenn H_1 und H_2 *ppf* sind, so sind es auch die Ausdrücke $\ulcorner \sim H_1 \urcorner$, $\ulcorner (H_1 \wedge H_2) \urcorner$, $\ulcorner (H_1 \vee H_2) \urcorner$, $\ulcorner (H_1 \rightarrow H_2) \urcorner$, $\ulcorner (H_1 \leftrightarrow H_2) \urcorner$.

(3) Wenn $H(a)$ eine *ppf* ist, so sind es auch die Ausdrücke $\ulcorner (a) H(a) \urcorner$ und $\ulcorner (\exists a) H(a) \urcorner$.

(4) Die unter (1)—(3) angeführten *ppf* sind sämtliche *ppf*.

Das *General Existence Theorem* lautet:

Ist H eine ppf, in der keine freien Variablen gebunden vorkommen, in der höchstens die Variablen $a_1, \ldots, a_n$ frei vorkommen und in der die Variable a nicht vorkommt, so ist

$$\ulcorner \exists a (a_1) \ldots (a_n) (\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \varepsilon a \leftrightarrow H) \urcorner$$

in G *beweisbar.*

Das *General Existence Theorem* veranlaßt uns, die Theorie G zu erweitern. Die Erweiterungstheorie G^+ von G entsteht dabei durch Hinzunahme der Axiome eines Axiomenschemas B^+ zu den unter A, C, D, E aufgeführten Axiomen. Die Axiome des Schemas B^+ seien alle Aussagen der Form

$$\ulcorner \forall b_1 \ldots \forall b_m \exists a (a_1) \ldots (a_n) (\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \varepsilon a \leftrightarrow H(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)) \urcorner,$$

wobei $H(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$ ein Ausdruck in der Theorie G ist, in dem die Variable a nicht vorkommt und in dem genau die Variablen $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ frei vorkommen. Daß G Untertheorie von G^+ ist, ergibt sich daraus, daß alle Axiome der Gruppe B Axiome des Axiomenschemas B^+ sind. Wir wollen noch in der Theorie G den Funktor '$\Im$' (Zeichen für die Operation des allgemeinen Durchschnitts) einführen. Das geschieht durch die Festsetzung:

'$\Im(x)$' $=_{\mathrm{Df}}$ '$\iota z (u) (u \varepsilon z \leftrightarrow (v) (v \varepsilon z \rightarrow u \varepsilon v))$' („*Durchschnitt von x*")[1].
Da in G '$\forall x (\sim x = 0 \rightarrow \Im(x) \subseteq \mathfrak{S}(x))$' beweisbar ist, ist' $(x) (\sim x = 0 \rightarrow M \Im(x))$' in G beweisbar.

Ferner ist in G beweisbar:

$$\text{'}\forall x (\sim x = 0 \wedge x \subseteq On \rightarrow \Im(x) \varepsilon x \wedge \forall y (y \varepsilon x \rightarrow \Im(x) \leqq y))\text{'}.$$

(„*Für jede nicht-leere Teilklasse x der Klasse On aller Ordinalzahlen ist* $\Im(x)$ *die kleinste Ordinalzahl dieser Klasse.*")

4. Das axiomatische System der Mengenlehre nach Klaua

4.1. Die Klauasche Mengenlehre ist ausführlich in den Arbeiten Klaua 1957 und Klaua 1964 dargestellt. Die Objekte der Betrachtung nennt Klaua Dinge. Die Theorie hat zwei binäre Relationen als Grundbegriffe, die Elementbeziehung und die Stufenbeziehung. Die Klauasche Mengenlehre ist eine Theorie AM[2]) im Sinne der Einleitung, eine axiomatische Theorie mit Standardformalisierung, deren

[1]) Die Beweisbarkeit der Unizitätsbedingung ergibt sich aus [G/M 3] und aus dem Extensionalitätsaxiom (Axiom A3). Der Funktor '$\Im$' ist normal, vgl. Gödel 1940.

[2]) Die Bezeichnung 'AM' ist in Anlehnung an den Buchtitel „Allgemeine Mengenlehre" gewählt.

nicht-logische Konstanten endlich viele Prädikate sind, nämlich die beiden zweistelligen Prädikate '$\in$' (Zeichen für die Elementbeziehung) und '$\sqsubset$' (Zeichen für die Stufenbeziehung). Zur Formulierung der nicht-logischen Axiome der Theorie AM werden weitere Prädikate in der Theorie AM eingeführt[1]):

'$\boldsymbol{El}x$' $=_{\mathrm{Df}}$ '$\exists y\, x \in y$' (*„x ist Element"*)

'$\boldsymbol{Ur}x$' $=_{\mathrm{Df}}$ '$(\boldsymbol{El}x \wedge \forall y\, x \sqsubset y)$' (*„x ist Urelement"*[2])

'$\boldsymbol{Kl}$' $=_{\mathrm{Df}}$ '$(\sim \boldsymbol{Ur})$' (*Klasse*)

'$\boldsymbol{Me}$' $=_{\mathrm{Df}}$ '$(\boldsymbol{Kl} \wedge \boldsymbol{El})$' (*Menge*)

'$\boldsymbol{Un}$' $=_{\mathrm{Df}}$ '$(\boldsymbol{Kl} \wedge (\sim \boldsymbol{El}))$'[3] (*Unmenge*)

'$x \sqsubset y$' $=_{\mathrm{Df}}$ '$(x \sqsubset y \wedge y \not\sqsubset x)$' (*„x ist stufengleich y"*)

'$\vdash$' $=_{\mathrm{Df}}$ '$(\sqsubset \wedge (\sim \sqsubset))$' (*stufenkleiner*)

4.2. Es folgen die nicht-logischen Axiome der Theorie AM, damit ist dann die Theorie AM erklärt.

Axiome I: Stufenaxiome

1. '$\forall x\, x \not\sqsubset x$',
2. '$\forall x \forall y \forall z (x \sqsubset y \wedge y \sqsubset z \to x \sqsubset z)$',
3. '$\forall x \forall y (x \sqsubset y \vee y \sqsubset x)$',
4. '$\forall z (\exists x x \in z \to \exists x (x \in z \wedge \forall y (y \in z \to x \sqsubset y)))$',
5. '$\forall z (\exists x x \in z \to \forall x (x \in z \to x \vdash z) \wedge \sim \exists y (y \vdash z \wedge \forall x (x \in z \to x \vdash y)))$',
6. '$\forall y \forall z (\boldsymbol{Kl}y \wedge \boldsymbol{Kl}z \wedge \sim \exists x x \in z \to z \sqsubset y)$',
7. '$\forall x \exists y (\boldsymbol{El}x \to \boldsymbol{El}y \wedge x \vdash y)$'.

Mit diesen Axiomen ist die Stufenbeziehung axiomatisch festgelegt.

---

[1]) Die folgenden Festsetzungen sind bei der hier benutzten strengen, an QUINE orientierten Formulierung unvollständig. Zunächst ist zu sagen, daß das Definiendum stets für sämtliche Variablen erklärt sein soll. Durch Einsetzungen ist das allein nicht zu verwirklichen, denn dann kommt man zu Variablenkonfusionen, die nicht den beabsichtigten Festsetzungen entsprechen. Ein Beispiel dafür ist:

$$\text{'}\boldsymbol{El}y\text{'} =_{\mathrm{Df}} \text{'}(\exists y x \in y)\, x/y\text{'}.$$

Bei diesem Beispiel haben wir vor der Einsetzung von 'y' für 'x' die gebundene Variable 'y' in '$\exists y x \in y$' in eine von 'x' verschiedene Variable umzubenennen. Ähnliche Absicherungen benötigt man, wenn ein Definiendum in den Wirkungsbereich einer gebundenen Variablen des zugehörigen Definiens gerät. So verstehen wir z. B. unter '$\forall x \exists y (\boldsymbol{El}x \to x \in y)$' nicht die Zeichenreihe '$\forall x \exists y (\exists y x \in y \to x \in y)$' (Variablenkollision), sondern eine Aussage der Form $\ulcorner \forall x \exists y (\exists a x \in a \to x \in y) \urcorner$, wobei a eine von 'x' und 'y' verschiedene Variable sei. Die hier erwähnten Vorsichtsmaßnahmen beziehen sich ebenso schon auf die Definitionen des Abschnitts 3 dieser Arbeit.

[2]) Das Wort '*Individuum*' vermeiden wir in diesem Zusammenhang, da wir in der Einleitung zu dieser Arbeit die Elemente des Individuenbereiches einer Interpretation $\mathfrak{M}$ die *Individuen von* $\mathfrak{M}$ nannten.

[3]) Es genügt zu definieren: '$\boldsymbol{Un}$' $=_{\mathrm{Df}}$ '$(\sim \boldsymbol{El})$'.

Axiome II: Klassenbildungsaxiome (Komprehensionsaxiome)

Ist $H(a, a_1, \ldots, a_n)$ ein Ausdruck von AM, in dem genau die Variablen $a, a_1, \ldots, a_n$ frei vorkommen und in dem die Variable b nicht vorkommt, so ist

$$\ulcorner \forall a_1 \ldots \forall a_n \exists b (\boldsymbol{Kl} b \wedge \forall a (a \in b \leftrightarrow \boldsymbol{El} a \wedge H(a, a_1, \ldots, a_n))) \urcorner$$

ein Komprehensionsaxiom.

Axiom III: Extensionalitätsaxiom

$$\text{'}\forall u \forall v (\boldsymbol{Kl} u \wedge \boldsymbol{Kl} v \wedge \forall x (x \in u \leftrightarrow x \in v) \rightarrow u = v)\text{'}.$$

Axiom IV: Mengenbildungsaxiom

$$\text{'}\forall y \exists z (\boldsymbol{El} y \rightarrow \boldsymbol{Me} z \wedge \forall x (x \in z \leftrightarrow x \vdash y))\text{'}.$$

Das Mengenbildungsaxiom garantiert die Existenz sogenannter *Allmengen*, das sind nicht-leere Mengen, die zu einem gegebenen Element alle stufenkleineren Dinge als Elemente haben.

In AM wird definiert[1]):

$$\ulcorner \underset{a}{\boldsymbol{K}} H(a) \urcorner =_{\mathrm{Df}} \ulcorner \iota b (\boldsymbol{Kl} b \wedge \forall a (a \in b \leftrightarrow H(a))) \urcorner,$$

$$\ulcorner \underset{a}{\boldsymbol{M}} H(a) \urcorner =_{\mathrm{Df}} \ulcorner \iota b (\boldsymbol{Me} b \wedge \forall a (a \in b \leftrightarrow H(a))) \urcorner$$

($H(a)$ ist dabei ein beliebiger Ausdruck von AM, in dem genau die Variable a frei vorkommt, und b sei eine neue Variable). Ferner wird in AM definiert:

'$\emptyset$' $=_{\mathrm{Df}} \ulcorner \underset{a}{\boldsymbol{K}} \sim a = a \urcorner$ (*Nullklasse* oder *leere Klasse*),

'$\boldsymbol{E}$' $=_{\mathrm{Df}} \ulcorner \underset{a}{\boldsymbol{K}} \boldsymbol{El} a \urcorner$ (*Allklasse*),

'$\boldsymbol{I}$' $=_{\mathrm{Df}} \ulcorner \underset{a}{\boldsymbol{K}} \boldsymbol{Ur} a \urcorner$ (*Urelementebereich*),

'$\boldsymbol{M}$' $=_{\mathrm{Df}} \ulcorner \underset{a}{\boldsymbol{K}} \boldsymbol{Me} a \urcorner$ (*Klasse aller Mengen*),

$$\ulcorner \boldsymbol{P} a \urcorner =_{\mathrm{Df}} \ulcorner \iota b (\boldsymbol{Kl} a \wedge \boldsymbol{Kl} b \wedge \forall c (c \in b \leftrightarrow \boldsymbol{El} c \wedge c \subseteq a)) \urcorner$$

(c und b seien neue Variablen).

In AM ist beweisbar[2]):

'$\exists x x = \emptyset$', '$\exists x x = \boldsymbol{E}$', '$\exists x x = \boldsymbol{I}$', '$\exists x x = \boldsymbol{M}$', '$\forall y (\boldsymbol{Kl} y \rightarrow \exists x x = \boldsymbol{P} y)$'

(daher ist '$\boldsymbol{P}$' ein einstelliger '$\boldsymbol{Kl}$'-Funktor von AM).

Axiom V: Unendlichkeitsaxiom

'$\boldsymbol{unend}\ \boldsymbol{I}$'.

Das Unendlichkeitsaxiom besagt, daß die Klasse $\boldsymbol{I}$ aller Urelemente eine echte zu $\boldsymbol{I}$ äquivalente Unterklasse hat, und damit sichert dieses Axiom überhaupt die Existenz von Urelementen.

---

[1]) Vgl. Klaua 1964, Kapitel I, § 3 (kurz: [K/I, § 3]).

[2]) Vgl. [K/I, Satz 2 und Satz 6].

Axiom VI: Auswahlaxiom

$$\text{'}\forall y \exists z (y \subsetneqq \boldsymbol{M} \wedge \boldsymbol{disj}\ y \wedge \emptyset (\sim \in) y \rightarrow z \boldsymbol{Auswy})\text{'}.$$

Das Auswahlaxiom besagt, daß es zu jeder Klasse, deren Elemente nicht-leere und paarweise disjunkte Mengen sind, eine Auswahl gibt, das ist eine Klasse, die aus jedem Element der gegebenen Klasse genau ein Element als Element enthält.

Axiom VII: Ersetzungsaxiom

$$\text{'}\forall u \forall v (u \in \boldsymbol{M} \wedge u \sim v \rightarrow v \in \boldsymbol{M})\text{'}.$$

Das Ersetzungsaxiom besagt, daß jede zu einer Menge äquivalente Klasse eine Menge ist.

4.3. Es soll noch eine Untertheorie AM^- der Theorie AM betrachtet werden, die in einer Abänderung des Axiomenschemas II besteht. Zur Formulierung dieser Variante der Theorie AM nennen wir (in Anlehnung an GÖDEL 1940) genau folgende Ausdrücke *primitiv*:

(1) $\ulcorner Z_1 \in Z_2 \urcorner$, $\ulcorner Z_1 = Z_2 \urcorner$ und $\ulcorner Z_1 = Z_2 \urcorner$, falls Z_1 und Z_2 Variablen sind oder von der Form $\ulcorner \underset{a}{\boldsymbol{K}} H(a) \urcorner$ bzw. $\ulcorner \underset{a}{\boldsymbol{M}} H(a) \urcorner$, wobei $H(a)$ primitiv ist und die Unizitätsbedingung für $\ulcorner (\boldsymbol{Kl} b \wedge \forall a (a \in b \leftrightarrow H(a))) \urcorner$ bzw. $(\boldsymbol{Me} b \wedge \forall a (a \in b \leftrightarrow H(a)))$ beweisbar ist.

(2) $\ulcorner \boldsymbol{El} a \urcorner$.

(3) $\ulcorner \sim H_1 \urcorner$, $\ulcorner (H_1 \wedge H_2) \urcorner$, $\ulcorner (H_1 \vee H_2) \urcorner$, $\ulcorner (H_1 \rightarrow H_2)$ und $\ulcorner (H_1 \leftrightarrow H_2) \urcorner$, falls H_1 und H_2 primitiv sind.

(4) $\ulcorner \forall a (\boldsymbol{El} a \rightarrow H(a)) \urcorner$ und $\ulcorner \exists a (\boldsymbol{El} a \wedge H(a)) \urcorner$, falls $H(a)$ primitiv ist.

In Abänderung des Axiomenschemas II formulieren wir mit Hilfe des Begriffes des primitiven Ausdruckes ein Axiomenschema II^-. Die Axiome des Axiomenschemas II^- seien sämtliche Aussagen der Form $\ulcorner \forall b_1 \ldots \forall b_n \exists c (\boldsymbol{Kl} c \wedge \forall a (a \in c \leftrightarrow \leftrightarrow \boldsymbol{El} a \wedge H(a, b_1, \ldots, b_n))) \urcorner$, wobei $H(a, b_1, \ldots, b_n)$ ein primitiver Ausdruck ist, in dem genau die Variablen $a, b_1, \ldots, b_n$ frei vorkommen und in dem die Variable c nicht vorkommt. Die Axiome der Theorie AM^- seien die unter I, II^-, III, IV, V, VI und VII angeführten Aussagen, und damit erweist sich die Theorie AM^- als Untertheorie der Theorie AM.

5. Die relative Konsistenz der Theorie AM bzgl. der Theorie G^+

5.1. Wir zeigen, daß AM relativ konsistent bzgl. G^+ ist, indem wir nachweisen, daß AM relativ interpretierbar in G^+ ist. Das Zeichen '$\boldsymbol{D}$' bezeichne das einstellige nicht unter den Konstanten der Theorie AM vorkommende Prädikat 'D' (intendierte Interpretation: *Ding*). Wir werden zeigen, daß $(\mathsf{AM})^{\boldsymbol{D}}$ interpretierbar in G^+ ist. Da die beiden Theorien $(\mathsf{AM})^{\boldsymbol{D}}$ und G^+ keine nicht-logischen Konstanten gemeinsam haben, ist einfach eine definitorische Erweiterung E von G^+ bzgl. $(\mathsf{AM})^{\boldsymbol{D}}$ anzugeben, eine gemeinsame Erweiterungstheorie E von G^+ und von $(\mathsf{AM})^{\boldsymbol{D}}$, deren Konstanten genau die Konstanten von G^+ und von $(\mathsf{AM})^{\boldsymbol{D}}$ sind und deren Axiome genau die Axiome von G^+ sind und zu jeder nicht-logischen Konstanten von $(\mathsf{AM})^{\boldsymbol{D}}$ genau eine mögliche Definition dieser Konstanten in G^+.

5.2. Vor der Konstruktion einer definitorischen Erweiterung E von G^+ bzgl. $(\mathsf{AM})^D$ sollen einige heuristische Betrachtungen gemacht werden. Wir betrachten für irgendeine unendliche Menge von G^+, etwa ω, $\omega \times 1$ als Menge aller Urelemente von AM. Die Urelemente sind also geordnete Paare $\langle x, 0\rangle$; 0 soll andeuten, daß es sich um Dinge der untersten Stufe (also Urelemente) handelt. Als Dinge der nächsten Stufe betrachten wir alle geordneten Paare $\langle y, 1\rangle$, wobei y eine Teilmenge von $\omega \times 1$ ist. Wir erhalten so die Mengen, deren Elemente Urelemente sind; insbesondere erhalten wir $\langle 0, 1\rangle$ als leere Menge. Die Ordinalzahlen benutzen wir, um eine Stufung zu erhalten. Wenn wir schon alle Dinge bis zur Stufe $\alpha + 1$ (α verschieden von 0) haben, so betrachten wir die geordneten Paare $\langle z, \alpha + 1\rangle$ als Dinge der Stufe $\alpha + 1$, wenn z eine Teilmenge der Menge aller Dinge bis zur Stufe $\alpha + 1$ ist, die ein Ding der Stufe α als Element hat. Wenn λ Ordinalzahl von zweiter Art ist (im Sinne GÖDELS, vgl. [G/7.42]) und wenn wir alle Dinge bis zu der Stufe λ haben, so betrachten wir die geordneten Paare $\langle z, \lambda\rangle$ als Dinge der Stufe λ, falls z eine Teilmenge der Menge aller Dinge bis zur Stufe λ ist, die Dinge beliebig hoher Stufe vor λ als Elemente enthält. Auf diese Weise erhält man eine gewisse Klasse von Dingen. Wir betrachten auch noch sämtliche Teilklassen dieser Klasse von Dingen, die keine Mengen sind, als Dinge. Die Dinge sind also gewisse geordnete Paare oder gewisse Unmengen. Die Elementbeziehung und die Stufenbeziehung betrachten wir wie folgt festgelegt:

(1) Sind $\langle x, \alpha\rangle$ und $\langle y, \beta\rangle$ Dinge, so gilt:

a) $\langle x, \alpha\rangle \in \langle y, \beta\rangle$ genau dann, wenn $\langle x, \alpha\rangle \,\varepsilon\, y$;

b) $\langle x, \alpha\rangle \sqsubset \langle y, \beta\rangle$ genau dann, wenn $\alpha \leqq \beta$.

(2) Sind u und v Dinge und ist v Unmenge, so gilt:

a) $u \in v$, genau dann, wenn $u \varepsilon v$;

b) $u \sqsubset v$.

Daß wir bei dieser Konstruktion von der Wohlordnung der Ordinalzahlen Gebrauch machen, ist unwesentlich; jede entsprechende Wohlordnung würde das auch leisten. Ebenso ist es völlig unwesentlich, daß wir bei der Konstruktion von der Menge ω der natürlichen Zahlen ausgehen. Die Ergebnisse gelten für jede unendliche Menge.

5.3. Nach GÖDEL 1940, [G/7.5], existiert in G (und damit auch in G^+) die Klasse A, wobei

$$\begin{aligned}
\text{`}A\text{'} =_{\mathrm{Df}} \text{`}\iota y(y \mathfrak{F} \mathfrak{n} On \wedge y`0 = \omega \times 1 \wedge y`1 = \mathfrak{P}(\omega \times 1) \times \{1\} \wedge \forall \alpha(\sim \alpha = 0 \rightarrow \\
\rightarrow \forall u(u \,\varepsilon\, y`(\alpha \dot{+} 1) \leftrightarrow \exists x(x \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(y \restriction (\alpha \dot{+} 1))) \wedge u = \langle x, \alpha \dot{+} 1\rangle \wedge \\
\wedge \sim x \cdot y`\alpha = 0))) \wedge \forall \lambda(\lambda \varepsilon K_{\mathrm{II}} \rightarrow \forall u(u \varepsilon y`\lambda \leftrightarrow \exists x(x \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(y`\lambda)) \wedge \\
\wedge u = \langle x, \lambda\rangle \wedge \forall v(v \varepsilon \lambda \rightarrow \exists w(v \varepsilon w \wedge w \varepsilon \lambda \wedge \sim x \cdot y`w = 0)))))\text{'}.
\end{aligned}$$

(Kleine griechische Buchstaben, mit Ausnahme von 'ε', 'ω', 'ι', 'φ', 'ψ' werden in der Arbeit GÖDEL 1940 als auf das eingeführte Prädikat '$\mathfrak{D}$' ([G/6.61]) relativierte

Variablen benutzt.) Die folgenden Aussagen (bzgl. der Menge der nicht-logischen Konstanten 'M', 'D', 'ε', '$\in$' und '$\sqsubset\!\!\sqsupset$') sind mögliche Definitionen der nicht-logischen Konstanten von $(\mathsf{AM})^{\boldsymbol{D}}$ in G (und damit auch in G^+): '$\forall x(Dx \leftrightarrow x\varepsilon\mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A)) \vee$ $\vee\, x \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A)) \wedge \mathfrak{Pr}x)$', '$\forall x\forall y(x \in y \leftrightarrow y \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A)) \wedge \mathfrak{Pr}y \wedge x\varepsilon y \vee (\exists z)\,\exists\alpha(\sim\alpha =$ $= 0 \wedge y = \langle z, \alpha\rangle \wedge y\varepsilon A`\alpha \wedge x\varepsilon z))$', '$\forall x\forall y(x \sqsubset\!\!\sqsupset y \leftrightarrow y \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A)) \wedge \mathfrak{Pr}y \wedge$ $\wedge\, (x\varepsilon\mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A)) \vee x \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A)) \wedge \mathfrak{Pr}x) \vee (\exists u)\,(\exists v)\,\exists x\exists\beta(x = \langle u, \alpha\rangle \wedge y = \langle v, \beta\rangle \wedge$ $\wedge\, \alpha \leqq \beta \wedge x\varepsilon A`\alpha \wedge y\varepsilon A`\beta))$'.

Wir erklären eine Theorie E:

(1) Die Konstanten von E seien die Konstanten von G^+ und die Konstanten von $(\mathsf{AM})^{\boldsymbol{D}}$.

(2) Die Axiome von E seien die Axiome von G^+ und die oben angegebenen möglichen Definitionen der nicht-logischen Konstanten von $(\mathsf{AM})^{\boldsymbol{D}}$ in G^+.

E ist Erweiterung von G^+. Wir wollen zeigen, daß E auch Erweiterung von $(\mathsf{AM})^{\boldsymbol{D}}$ ist, denn damit ist dann E eine gesuchte definitorische Erweiterung von G^+ bzgl. $(\mathsf{AM})^{\boldsymbol{D}}$. Um zu zeigen, daß E eine Erweiterung von $(\mathsf{AM})^{\boldsymbol{D}}$ ist, haben wir zu bestätigen, daß sämtliche nicht-logischen Axiome von $(\mathsf{AM})^{\boldsymbol{D}}$ in E beweisbar sind. Die nicht-logischen Axiome von $(\mathsf{AM})^{\boldsymbol{D}}$ sind die Relativierungen der nicht-logischen Axiome von AM auf $\boldsymbol{D}$ und die Aussage '$\exists x Dx$' von $(\mathsf{AM})^{\boldsymbol{D}}$.

5.4. Zunächst einige Vorbereitungen für die Beweise der nicht-logischen Axiome von $(\mathsf{AM})^{\boldsymbol{D}}$ in E. In den folgenden Ausführungen verzichten wir größtenteils auf Anführungszeichen bzw. *corners* (Quines Zeichen '$\ulcorner$', '$\urcorner$' der *quasi-quotation*).

5.4.1. $\vdash_{\mathsf{G}} \mathfrak{Pr}\mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A))$ (und damit auch $\vdash_{\mathsf{G}^+} \mathfrak{Pr}\mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A))$, $\vdash_{\mathsf{E}} \mathfrak{Pr}\mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A))$).

Beweis. Da nach Konstruktion in 5.3. $\mathrm{Un}_2 A$ gilt und da $\mathfrak{Pr}On$ gilt nach [G/7.17], gilt nach [G/5.44] $\mathfrak{Pr}A``On$. Also gilt nach [G/4.52], [G/4.5] $\mathfrak{Pr}\mathfrak{W}(A)$, und somit gilt nach [G/5.4] $\mathfrak{Pr}\mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A))$.

5.4.2. $\vdash_{\mathsf{E}} D\mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A))$.

Beweis. Das folgt aus 5.4.1. und aus der Definition des Prädikates $\boldsymbol{D}$ in E.

5.4.3. $\vdash_{\mathsf{E}} \forall y(y \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A)) \wedge \mathfrak{Pr}y \to \forall x(x\varepsilon y \leftrightarrow x \in y))$.

Beweis. Das folgt aus 5.3.

5.4.4.

1. $\vdash_{\mathsf{E}} \forall x\forall y(x \in y \to Dx \wedge Dy)$, 2. $\vdash_{\mathsf{E}} \forall x\forall y(x \sqsubset\!\!\sqsupset y \to Dx \wedge Dy)$.

Beweis. Das folgt aus den Definitionen der Prädikate von $(\mathsf{AM})^{\boldsymbol{D}}$, '$D$', '$\in$' und '$\sqsubset\!\!\sqsupset$', in E.

5.4.5.

1. $\vdash_{\mathsf{E}} \forall x((\boldsymbol{El})^D x \leftrightarrow \boldsymbol{El}x)$,
   $\vdash_{\mathsf{E}} \forall x((\boldsymbol{El})^D x \leftrightarrow x \in \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A)))$,
   $\vdash_{\mathsf{E}} \forall x((\boldsymbol{El})^D x \leftrightarrow x\varepsilon\mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A)))$,
   $\vdash_{\mathsf{E}} \forall x((\boldsymbol{El})^D x \leftrightarrow \exists\alpha x\varepsilon A`\alpha)$,
   $\vdash_{\mathsf{E}} \forall x((\boldsymbol{El})^D x \leftrightarrow (D \wedge M)x)$.

2. $\vdash_{\mathsf{E}} \forall x((\boldsymbol{Ur})^D x \leftrightarrow \exists y x \subset y \wedge \forall y(Dy \rightarrow x \not\subset y))$,
$\vdash_{\mathsf{E}} \forall x((\boldsymbol{Ur})^D x \leftrightarrow x \varepsilon A`0)$.

3. $\vdash_{\mathsf{E}} \forall x((\boldsymbol{Kl})^D x \leftrightarrow \sim(\exists y x \in y \wedge \forall y(Dy \rightarrow x \not\subset y)))$,
$\vdash_{\mathsf{E}} \forall x((\boldsymbol{Kl})^D x \leftrightarrow \sim Dx \vee \exists \alpha(\sim\alpha = 0 \wedge x \varepsilon A`\alpha) \vee x \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A)) \wedge \mathfrak{Pr} x)$.

4. $\vdash_{\mathsf{E}} \forall x((\boldsymbol{Me})^D x \leftrightarrow \exists y x \subset y \wedge \sim\forall y(Dy \rightarrow x \not\subset y))$,
$\vdash_{\mathsf{E}} \forall x((\boldsymbol{Me})^D x \leftrightarrow \exists \alpha(\sim\alpha = 0 \wedge x \varepsilon A`\alpha))$.

5. $\vdash_{\mathsf{E}} \forall x((\boldsymbol{Un})^D x \leftrightarrow \sim \boldsymbol{El} x)$,
$\vdash_{\mathsf{E}} \forall x((\boldsymbol{Un})^D x \leftrightarrow \sim Dx \vee x \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A)) \wedge \mathfrak{Pr} x)$,
$\vdash_{\mathsf{E}} \forall x((\boldsymbol{Un})^D x \leftrightarrow (\sim(D \wedge M))x)$.

6. $\vdash_{\mathsf{E}} \forall x \forall y(x(\not\subset)^D y \leftrightarrow x \not\subset y)$,
$\vdash_{\mathsf{E}} \forall x \forall y(x(\not\subset)^D y \leftrightarrow \exists \alpha \{x, y\} \subseteq A`\alpha \vee x \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A)) \wedge \mathfrak{Pr} x \wedge y \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A)) \wedge \mathfrak{Pr} y)$.

7. $\vdash_{\mathsf{E}} \forall x \forall y(x(\sqsubset)^D y \leftrightarrow x \sqsubset y)$,
$\vdash_{\mathsf{E}} \forall x \forall y(x(\sqsubset)^D y \leftrightarrow \exists \alpha \exists \beta(x \varepsilon A`\alpha \wedge y \varepsilon A`\beta \wedge \alpha \varepsilon \beta) \vee x \varepsilon \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A)) \wedge$
$\wedge y \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A)) \wedge \mathfrak{Pr} y)$.

Beweis. Diese Ergebnisse erhält man aus den Definitionen der nicht-logischen Konstanten von $(\mathsf{AM})^{\boldsymbol{D}}$ in E und aus 5.4.1.—5.4.4.

5.4.6. $\vdash_{\mathsf{G}} \forall x(Mx \rightarrow (x \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A)) \leftrightarrow \exists \alpha(\sim\alpha = 0 \wedge \langle x, \alpha\rangle \varepsilon A`\alpha)))$.

Beweis.

(1) Gelte Mx und $\exists \alpha(\sim\alpha = 0 \wedge \langle x, \alpha\rangle \varepsilon A`\alpha)$. Aus der Konstruktion der Klasse A folgt, daß $x \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A))$ gilt.
(2) Gelte Mx und $x \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A))$.
(a) Gelte $x = 0$. Dann gilt $\langle x, 1\rangle \varepsilon A`1$.
(b) Gelte $\sim x = 0$. Nach [G/5.14] gilt $M\,\mathfrak{D}(x)$. Da $\mathfrak{D}(x) \subseteq On$, gilt nach [G/7.3] $\mathfrak{Ord}\,\mathfrak{S}(\mathfrak{I}(x))$. Aus [G/5.122] ergibt sich $M\,\mathfrak{S}(\mathfrak{D}(x))$, und somit gilt nach [G/6.61] $\mathfrak{D}\,\mathfrak{S}(\mathfrak{D}(x))$. Also gilt nach [G/6.62] $\mathfrak{S}(\mathfrak{I}(x)) \varepsilon On$. α_x sei $\mathfrak{S}(\mathfrak{D}(x))$. Es gilt $\forall \alpha(\alpha \varepsilon \mathfrak{D}(x) \rightarrow \alpha \subseteq \alpha_x)$.
(α) Es gelte $\alpha_x \varepsilon \mathfrak{D}(x)$. Dann gibt es eine Menge z, so daß $\langle z, \alpha_x\rangle \varepsilon x$ gilt, und ferner gilt $\forall y(y \varepsilon x \rightarrow \exists y_0 \exists \beta(y = \langle y_0, \beta\rangle \wedge y \varepsilon A`\beta \wedge \beta \varepsilon \alpha_x \dot{+} 1))$. Also gilt $x \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A \restriction (\alpha_x \dot{+} 1))) \wedge \sim x \cdot A`\alpha_x = 0$, und somit gilt $\langle x, \alpha_x \dot{+} 1\rangle \varepsilon A`(\alpha_x \dot{+} 1)$.
(β) Es gelte $\sim \alpha_x \varepsilon \mathfrak{D}(x)$. Dann gibt es zu jedem $\gamma \varepsilon \alpha_x$ ein $\beta \varepsilon \alpha_x$ und eine Menge z, so daß $\gamma \varepsilon \beta \wedge \langle z, \beta\rangle \varepsilon x$ gilt. Somit gilt $x \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A \restriction \alpha_x)) \wedge \forall \gamma \exists \beta(\gamma \varepsilon \alpha_x \rightarrow \beta \varepsilon \alpha_x \wedge \gamma \varepsilon \beta \wedge \sim x \cdot A`\beta = 0)$, also gilt $\langle x, \alpha_x\rangle \varepsilon A`\alpha_x$.

5.4.7. Nach [G/M5] existieren Funktionen Kp_1, Kp_2 auf V in G (und damit auch in G^+ und E), so daß gilt: $Kp_1`x = \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(\{x\}))$ und $Kp_2`x = \mathfrak{S}(\mathfrak{D}(\{x\}))$.

$Kp_1`x$ nennen wir *die erste Komponente der Menge* $x$ und $Kp_2`x$ *die zweite Komponente der Menge* x.

Es gilt also für alle Mengen u und v: $Kp_1`\langle u, v\rangle = u$ und $Kp_2`\langle u, v\rangle = v$. Ferner gilt für jede Klasse z: $Kp_1``z = \mathfrak{W}(z)$ und $Kp_2``z = \mathfrak{D}(z)$.

5.5. Es folgen die Beweise der nicht-logischen Axiome von $(\mathsf{AM})^D$ in E.

5.5.1. Beweis von $\exists x Dx$.
Es gilt zum Beispiel $D\langle 0, 1\rangle$.

5.5.2. Die Beweise der Axiome $(\mathrm{I}.1)^D$, $(\mathrm{I}.2)^D$ und $(\mathrm{I}.3)^D$ ergeben sich sofort aus den Definitionen der Prädikate D und '$\sqsubset$' von $(\mathsf{AM})^D$ in E.

5.5.3. Beweis des Axioms $(\mathrm{I}.4)^D$: $\forall(z)^D(\exists(x)^D(x)^D \in (z)^D \to \exists(x)^D((x)^D \in (z)^D \wedge \wedge \forall(y)^D((y)^D \in (z)^D \to (x)^D \sqsubset (y)^D)))$. Da $\vdash_{\mathsf{E}} \forall z(Dz \wedge \exists(x)^D(x)^D \in z \leftrightarrow \exists x x \in z)$, ist dieses Axiom nach 5.4.4. äquivalent zu I.4: $\forall z(\exists x x \in z \to \exists x(x \in z \wedge \forall y(y \in z \to \to x \sqsubset y)))$. Gelte $\exists x x \in z$. Also gilt Dz.

(1) Gelte $\mathfrak{Pr} z$. Dann gilt $z \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A))$, und da $\exists x x \in z$ gilt, gilt $\mathfrak{D}(z) \neq 0$ und $\mathfrak{D}(z) \subseteq On$. $\mathfrak{I}(\mathfrak{D}(z))$ ist die kleinste Ordinalzahl von $\mathfrak{D}(z)$. Es existiert also eine Menge u, so daß $\langle u, \mathfrak{I}(\mathfrak{D}(z))\rangle \varepsilon z$. Und nach den Definitionen der Prädikate '$\in$' und '$\sqsubset$' von $(\mathsf{AM})^D$ in E gilt auch $\langle u, \mathfrak{I}(\mathfrak{D}(z))\rangle \in z$ und $\forall y(y \in z \to \to \langle u, \mathfrak{I}(\mathfrak{D}(z))\rangle \sqsubset y)$; denn gilt $y \in z$, so gibt es eine Menge y_0 und eine Ordinalzahl α, so daß $y = \langle y_0, \alpha\rangle$ und $\mathfrak{I}(\mathfrak{D}(z)) \leqq \alpha$, also gilt $\langle u, \mathfrak{I}(\mathfrak{D}(z))\rangle \sqsubset \langle y_0, \alpha\rangle$.

(2) Gelte Mz. Dann gilt wegen $\exists x x \in z$ und nach 5.4.5.1. $\exists \alpha(\sim\alpha = 0 \wedge z \varepsilon A'\alpha)$. Da $\exists x x \in z$ gilt, existiert eine Menge $u \neq 0$, so daß $z = \langle u, \alpha\rangle$ und $\sim\alpha = 0$ gilt. Aus 5.4.6. folgt $u \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A))$. Aus $u \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A))$, $\sim u = 0$ und $\sim\alpha = 0$ folgt, daß eine Menge w existiert, so daß $\langle w, \mathfrak{I}(\mathfrak{D}(u))\rangle \varepsilon u$ gilt. Nach den Definitionen der Prädikate '$\in$' und '$\sqsubset$' in E gilt $\langle w, \mathfrak{I}(\mathfrak{D}(u))\rangle \in z$ und $\forall y(y \in z \to \to \langle w, \mathfrak{I}(\mathfrak{D}(u))\rangle \sqsubset y)$.

5.5.4. Beweis von $(\mathrm{I}.5)^D$: $\forall(z)^D(\exists(x)^D(x)^D \in (z)^D \to \forall(x)^D((x)^D \in (z)^D \to (x)^D \sqsubset \sqsubset (z)^D) \wedge \sim\exists(y)^D((y)^D \sqsubset (z)^D \wedge \forall(x)^D((x)^D \in (z)^D \to (x)^D \sqsubset (y)^D)))$. Dieses Axiom ist äquivalent zu I.5: $\forall z(\exists x x \in z \to \forall x(x \in z \to x \sqsubset z) \wedge \sim\exists y(y \sqsubset z \wedge \forall x(x \in z \to \to x \sqsubset y)))$. Gelte $\exists x x \in z$. Also gilt Dz.

(1) Gelte $\mathfrak{Pr} z$. Nach 5.4.5. gilt $\forall x(x \in z \to x \sqsubset z)$. Angenommen, es gelte für ein y $y \sqsubset z \wedge \forall x(x \in z \to x \sqsubset y)$. Dann gibt es eine Menge y_0 und eine Ordinalzahl α, so daß $y = \langle y_0, \alpha\rangle$ und $y \varepsilon A'\alpha$. Aus der Definition der Funktion A in 5.3., aus $\forall x(x \in z \to x \sqsubset y)$ und aus 5.4.5. folgt, daß $z \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A \restriction \alpha))$. Aus $z \subseteq \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A \restriction \alpha))$ folgt nach [G/5.2; 5.16; 5.122; 5.12] Mz. Das ist ein Widerspruch zu $\mathfrak{Pr} z$.

(2) Gelte Mz. Aus 5.4.5.1. und $\exists x x \in z$ folgt, daß $\exists \alpha(\sim\alpha = 0 \wedge z \varepsilon A'\alpha)$ gilt. Also gilt $z = \langle u, \alpha\rangle$ für eine Menge $u \neq 0$. Aus den Definitionen der Prädikate '$\in$' und '$\sqsubset$' in E ergibt sich, daß $\forall x(x \in z \to x \sqsubset z)$ gilt. Nehmen wir an, es gelte für ein y $y \sqsubset z \wedge \forall x(x \in z \to x \sqsubset y)$. Dann gibt es eine Menge y_0 und eine Ordinalzahl β, so daß $y = \langle y_0, \beta\rangle$ und $\beta \varepsilon \alpha$.

(α) Gelte $\alpha \varepsilon K_{\mathrm{I}}$. Dann gibt es eine Ordinalzahl γ, so daß $\alpha = \gamma \dotplus 1$, denn es gilt $\sim\alpha = 0$. Gilt $x \in z$, so gilt $x \sqsubset y$ nach Voraussetzung, also gibt es eine Ordinalzahl ξ, so daß $x \varepsilon A'\xi$ und $\xi \varepsilon \beta$ gilt. Also gilt $u \cdot A'\gamma = 0$, da $\beta \leqq \gamma$. Dieses Ergebnis widerspricht der Tatsache, daß $z \varepsilon A'(\gamma \dotplus 1)$ gilt.

(β) Gelte $\alpha \varepsilon K_{\mathrm{II}}$. Da für alle $x \in z$ eine Ordinalzahl $\xi \varepsilon \beta$ existiert, so daß $x \varepsilon A'\xi$ gilt, existiert keine Ordinalzahl μ, so daß $\beta \varepsilon \mu$, $\mu \varepsilon \alpha$ und $u \cdot A'\mu \neq 0$ gelten. Damit haben wir einen Widerspruch zu der Tatsache, daß $z \varepsilon A'\alpha$ gilt.

5.5.5. Beweis von $(\mathrm{I}.6)^{\boldsymbol{D}}$: $\forall(y)^D\forall(z)^D((\boldsymbol{Kl})^D(y)^D \wedge (\boldsymbol{Kl})^D(z)^D \wedge \sim\exists(x)^D(x)^D \in (z)^D \to (z)^D \subseteq (y)^D)$. Dieses Axiom ist äquivalent zu $\forall y\forall z(Dy \wedge Dz \wedge (\boldsymbol{Kl})^D y \wedge (\boldsymbol{Kl})^D z \wedge \sim\exists x x \in z \to z \subseteq y)$. Aus $Dz \wedge (\boldsymbol{Kl})^D z \wedge \sim\exists x x \in z$ erhält man nach 5.3. und 5.4.5., daß $z = \langle 0, 1\rangle$ gilt. Aus $Dy \wedge (\boldsymbol{Kl})^D y$ erhält man nach 5.4.5.3., daß $\exists\alpha(\sim\alpha = 0 \wedge y\varepsilon A'\alpha) \vee y \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A)) \wedge \mathfrak{Pr}y$ gilt. Somit gilt nach 5.3. $\langle 0, 1\rangle \ldots y$.

5.5.6. Beweis von $(\mathrm{I}.7)^{\boldsymbol{D}}$: $\forall(x)^D\exists(y)^D((\boldsymbol{El})^D(x)^D \to (\boldsymbol{El})^D(y)^D \wedge (x)^D \subset (y)^D)$. Da $\subset \mathsf{E} \exists x Dx$, ist dieses Axiom von E äquivalent zu I.7: $\forall x\exists y(\boldsymbol{El}x \to \boldsymbol{El}y \wedge x \subset y)$. Gilt $\boldsymbol{El}x$, so gilt nach 5.4.5.1. $\exists\alpha x\varepsilon A'\alpha$. Nach 5.3. gilt $\langle A'\alpha, \alpha \dot{+} 1\rangle\varepsilon A'(\alpha \dot{+} 1)$, und nach 5.4.5.1. und nach 5.3. gilt $\boldsymbol{El}\langle A'\alpha, \alpha \dot{+} 1\rangle \wedge x \subset \langle A'\alpha, \alpha \dot{+} 1\rangle$.

5.5.7. Beweis der Axiome des Schemas $(\mathrm{II})^{\boldsymbol{D}}$: $\forall(a_1)^D \ldots \forall(a_n)^D\exists(b)^D((\boldsymbol{Kl})^D(b)^D \wedge \forall(a)^D((a)^D \in (b)^D \leftrightarrow (\boldsymbol{El})^D(a)^D \wedge (H(a/(a)^D, a_1/(a_1)^D, \ldots, a_n/(a_n)^D))^D))$. Die Axiome dieses Schemas sind äquivalent zu den Axiomen des Schemas: $\forall a_1 \ldots \forall a_n(Da_1 \wedge \ldots \wedge Da_n \to \exists b(Db \wedge (\boldsymbol{Kl})^D b \wedge \forall a(a \in b \leftrightarrow \boldsymbol{El}a \wedge (H(a, a_1, \ldots, a_n))^D)))$. Gelte $Da_1 \wedge \ldots \wedge Da_n$. Aus den Definitionen der nicht-logischen Konstanten von $(\mathsf{AM})^{\boldsymbol{D}}$ in E und aus dem Axiomenschema B^+ folgt die Existenz einer Klasse u, so daß gilt: $\forall a(a\varepsilon u \leftrightarrow \boldsymbol{El}a \wedge (H(a, a_1, \ldots, a_n))^D)$.

(1) Gelte $\mathfrak{Pr}u$. Dann gilt Du, denn nach 5.4.5.1. gilt $u \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A))$. Nach 5.4.5.3. gilt $(\boldsymbol{Kl})^D u$, und nach 5.4.3. gilt $\forall a(a\varepsilon u \leftrightarrow a \in u)$. Also gilt $Du \wedge (\boldsymbol{Kl})^D u \wedge \forall a(a \in u \leftrightarrow \boldsymbol{El}a \wedge (H(a, a_1, \ldots, a_n))^D)$.

(2) Gelte Mu. Nach [G/5.14] gilt $M\mathfrak{D}(u)$. Da nach 5.4.5.1. $\mathfrak{D}(u) \subseteq On$, gilt nach [G/7.3; 5.112; 6.61; 6.62] $\mathfrak{S}(\mathfrak{D}(u))\varepsilon On$.

(α) Gelte $\mathfrak{S}(\mathfrak{D}(u))\varepsilon K_{\mathrm{I}}$. Da nach 5.4.5.1. $u \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A))$, gilt nach 5.3. $\langle u, \mathfrak{S}(\mathfrak{D}(u)) \dot{+} 1\rangle\varepsilon A'(\mathfrak{S}(\mathfrak{D}(u)) \dot{+} 1)$.

(β) Gelte $\mathfrak{S}(\mathfrak{D}(u))\varepsilon K_{\mathrm{II}}$. Da nach 5.4.5.1. $u \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A))$, gilt nach 5.3. $\langle u, \mathfrak{S}(\mathfrak{D}(u))\rangle \varepsilon$ $\varepsilon A'\mathfrak{S}(\mathfrak{D}(u))$.

In beiden Fällen gibt es also eine Ordinalzahl $\alpha \neq 0$, so daß $\langle u, \alpha\rangle\varepsilon A'\alpha$ gilt. Nach 5.4.5.1. und nach 5.4.5.3. gilt $D\langle u, \alpha\rangle \wedge (\boldsymbol{Kl})^D\langle u, \alpha\rangle$, und nach 5.3. gilt $\forall a(a\varepsilon u \leftrightarrow a \in \langle u, x\rangle)$, da $\alpha \neq 0$. Somit gilt $D\langle u, \alpha\rangle \wedge (\boldsymbol{Kl})^D\langle u, \alpha\rangle \wedge \forall a(a \in \in \langle u, \alpha\rangle \leftrightarrow \boldsymbol{El}a \wedge (H(a, a_1, \ldots, a_n))^D)$.

5.5.8. Beweis von $(\mathrm{III})^{\boldsymbol{D}}$: $\forall(u)^D\forall(v)^D((\boldsymbol{Kl})^D(u)^D \wedge (\boldsymbol{Kl})^D(v)^D \wedge \forall(x)^D((x)^D \in (u)^D \leftrightarrow (x)^D \in (v)^D) \to (u)^D = (v)^D)$. Dieses Axiom ist zu $\forall u\forall v(Du \wedge (\boldsymbol{Kl})^D u \wedge Dv \wedge (\boldsymbol{Kl})^D v \wedge \forall x(x \in u \leftrightarrow x \in v) \to u = v)$ äquivalent. Gelte $Du \wedge (\boldsymbol{Kl})^D u \wedge Dv \wedge (\boldsymbol{Kl})^D v \wedge \forall x(x \in u \leftrightarrow x \in v)$.

(1) Gelte $\mathfrak{Pr}u \wedge \mathfrak{Pr}v$. Aus $\forall x(x \in u \leftrightarrow x \in v)$ folgt dann nach 5.4.3. $\forall x(x\varepsilon u \leftrightarrow x\varepsilon v)$. Da wegen Axiom A2 $\forall u\forall v(\forall x(x\varepsilon u \leftrightarrow x\varepsilon v) \leftrightarrow (x)(x\varepsilon u \leftrightarrow x\varepsilon v))$ gilt, gilt nach Axiom A3 $u = v$.

(2) Gelte $Mu \wedge Mv$. Dann gibt es von der leeren Klasse verschiedene Ordinalzahlen α, β und Mengen u_0, v_0, so daß $u = \langle u_0, \alpha\rangle$ und $v = \langle v_0, \beta\rangle$. Aus $\forall x(x \in u \leftrightarrow \leftrightarrow x \in v)$ folgt, daß $\alpha = \beta$ gilt und daß $\forall x(x\varepsilon u_0 \leftrightarrow x\varepsilon v_0)$ gilt. Also gilt wieder nach Axiom A3 $u_0 = v_0$, und somit gilt auch $u = v$.

(3) Daß $\mathfrak{Pr}u \wedge Mv$ bzw. daß $Mu \wedge \mathfrak{Pr}v$ gilt, ist wegen $\forall x(x \in u \leftrightarrow x \in v)$ nicht möglich.

5.5.9. Beweis von $(\mathrm{IV})^{\boldsymbol{D}}$: $\forall(y)^D\exists(z)^D((\boldsymbol{El})^D(y)^D \to (\boldsymbol{Me})^D(z)^D \wedge \forall(x)^D((x)^D \in (z)^D \leftrightarrow (x)^D(\vdash)^D(y)^D))$. Dieses Axiom ist äquivalent zu $\forall y\exists z(\boldsymbol{Ely} \to (\boldsymbol{Me})^D z \wedge \wedge \forall x(x \in z \leftrightarrow x \vdash y))$. Gelte $\boldsymbol{Ely}$. Also gilt nach 5.4.5.1. $\exists \varkappa y \varepsilon A'\alpha$.

(1) Gelte $\alpha = 0$. Dann gilt $(\boldsymbol{Me})^D\langle 0,1\rangle \wedge \forall x(x \in \langle 0,1\rangle \leftrightarrow x \vdash y)$ nach 5.3. und nach 5.4.5.7.

(2) Gelte $\sim\alpha = 0$. Dann gilt $(\boldsymbol{Me})^D\langle \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A \restriction \alpha)), \alpha\rangle \wedge \forall x(x \vdash y \leftrightarrow x \in \langle \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A \restriction \restriction \alpha)), \alpha\rangle)$ nach 5.3. und nach 5.4.5.7.

5.5.10.

1. $\vdash_{\mathsf{E}}(\emptyset)^D = \langle 0,1\rangle$,
2. $\vdash_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{E})^D = \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A))$,
3. $\vdash_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{I})^D = \langle A'0,1\rangle$,
4. $\vdash_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{M})^D = \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A)) - A'0$.

Beweis. Diese Resultate ergeben sich aus 2.3., 5.3., 5.4.4., 5.4.5.

5.5.11. Beweis von $(\mathrm{V})^{\boldsymbol{D}}$: $\exists x(Dx \wedge x = (\boldsymbol{I})^D \wedge (\boldsymbol{Kl})^D x \wedge \exists y(Dy \cdot y(\subset)^D x \wedge \exists z(Dz \wedge \wedge (\boldsymbol{Abb\ von\ auf})^D zxy \wedge (\boldsymbol{eineind})^D z)))$. Zunächst gilt nach 5.5.10., 5.3. und 5.4.5.3. $\exists x(Dx \wedge x = (\boldsymbol{I})^D \wedge (\boldsymbol{Kl})^D x)$, denn es gilt $D\langle A'0,1\rangle \cdot A'0,1\rangle = (\boldsymbol{I})^D \wedge \wedge (\boldsymbol{Kl})^D\langle A'0,1\rangle$. Nach [G/M 5] existiert genau eine Funktion Nf über ω, so daß für alle $u\varepsilon\omega$ $Nf'u = u \dot{+} 1$. Es gilt ferner $\mathfrak{W}(Nf) = \omega - 1$ und $D\langle \mathfrak{W}(Nf) \times \times 1,1\rangle \wedge \langle \mathfrak{W}(Nf) \times 1,1\rangle(\subset)^D\langle A'0,1\rangle$. Nach [G/M5] existiert auch genau eine Funktion Nf_1 über ω, so daß für alle $u\varepsilon\omega$ $Nf_1'u = ([\,])^D(\langle u,0\rangle, \langle u \dot{+} 1,0\rangle)$ gilt. Aus $Nf_1\mathfrak{F}\mathfrak{n}\omega$ folgt nach [G/5.19] $M\,Nf_1$, und somit gilt nach [G/5.16] $M\,\mathfrak{W}(Nf_1)$. Ferner gilt $D\langle \mathfrak{W}(Nf_1),3\rangle \wedge (\boldsymbol{Abb\ von\ auf})^D\langle \mathfrak{W}(Nf_1), 3\rangle\langle A'0,1\rangle\langle \mathfrak{W}(Nf) \times \times 1,1\rangle \wedge (\boldsymbol{eineind})^D\langle \mathfrak{W}(Nf_1),3\rangle$.

5.5.12. Beweis von $(\mathrm{VI})^{\boldsymbol{D}}$: $\forall y(Dy \to \exists z(Dz \wedge (\exists z_1(Dz_1 \wedge z_1 = (\boldsymbol{M})^D \wedge y(\subseteq)^D z_1) \wedge (\boldsymbol{disj})^D y \wedge \exists z_2(Dz_2 \wedge z_2 = (\emptyset)^D \wedge z_2(\sim\in)\,y) \to z(\boldsymbol{Ausw})^D y)))$. Nach Axiom E gibt es eine Klasse r, so daß $\mathfrak{Un}r \wedge \forall x(Mx \wedge \sim\mathfrak{Em}x \to \exists y(My \wedge y\varepsilon x \wedge \langle y,x\rangle \varepsilon r))$ gilt.

Fall 1. Gelte $(D \wedge \mathfrak{Pr} \wedge (\boldsymbol{disj})^D)\,y \wedge y(\subseteq)^D\,(\boldsymbol{M})^D \wedge (\emptyset)^D\,(\sim\in)\,y$. Da $(\emptyset)^D\,(\sim\in)\,y$, gilt $\sim 0\varepsilon\mathfrak{W}(y)$, und da $(\boldsymbol{disj})^D\,y$, gilt $\mathfrak{Dis}\,\mathfrak{W}(y)$. (Das Prädikat '$\mathfrak{Dis}$' sei in G eingeführt durch die Festsetzung: '$\mathfrak{Dis}\,x' =_{\mathrm{Df}}$ '$\forall y\forall z(y \varepsilon x \wedge z \varepsilon x \wedge \sim y = z \to \mathfrak{Ex}yz)$'.) Wir werden zeigen, daß $D\,\mathfrak{W}(r \restriction \mathfrak{W}(y))$ und $\mathfrak{W}(r \restriction \mathfrak{W}(y))\,(\boldsymbol{Ausw})^D\,y$ gilt. Dazu zeigen wir zunächst, daß $\mathfrak{Pr}\,\mathfrak{W}(r \restriction \mathfrak{W}(y))$ gilt. Es gilt $\mathfrak{Pr}\,\mathfrak{D}(y)$, da sonst aus 5.3. My folgen würde. Nach [G/M 5] gibt es eine Klasse s, so daß $\forall t(t\varepsilon\mathfrak{D}(y) \to s't = \mathfrak{W}(y \restriction \{t\}))$ gilt. ($M\,\mathfrak{W}(y \restriction \{t\})$ folgt aus $y \restriction \{t\} \subseteq A't$; vgl. [G/5.12] und [G/5.16].) Nach 5.3. gilt $\mathfrak{Un}_2 s$, also gilt nach [G/5.44] $\mathfrak{Pr}s''\mathfrak{D}(y)$. Da $\mathfrak{S}(s''\mathfrak{D}(y)) = \mathfrak{W}(y)$, gilt nach [G/5.4] $\mathfrak{Pr}\,\mathfrak{W}(y)$. Da $\mathfrak{W}(y) \subseteq \mathfrak{D}(r)$, gilt nach [G/4.51] $\mathfrak{D}(r \restriction \mathfrak{W}(y)) = = \mathfrak{W}(y) \cdot \mathfrak{D}(r) \wedge \mathfrak{W}(y) \cdot \mathfrak{D}(r) = \mathfrak{W}(y)$. Es gilt $\mathfrak{Pr}r \restriction \mathfrak{W}(y)$, da sonst nach [G/5.14] und wegen $\mathfrak{D}(r \restriction \mathfrak{W}(y)) = \mathfrak{W}(y)\,M\,\mathfrak{D}(r \restriction \mathfrak{W}(y))$ im Widerspruch zu $\mathfrak{Pr}\,\mathfrak{W}(y)$ gelten würde. Da $\mathfrak{Dis}\,\mathfrak{W}(y)$, gilt $\mathfrak{Un}_2 r \restriction \mathfrak{W}(y)$. Aus $\mathfrak{D}(r \restriction \mathfrak{W}(y)) = \mathfrak{W}(y)$ und [G/5.44] folgt $\mathfrak{Pr}(r \restriction \mathfrak{W}(y))''\,\mathfrak{W}(y)$. Da nach [G/4.52] $(r \restriction \mathfrak{W}(y))''\,\mathfrak{W}(y) = \mathfrak{W}((r \restriction \mathfrak{W}(y)) \restriction \restriction \mathfrak{W}(y)) \wedge \mathfrak{W}((r \restriction \mathfrak{W}(y)) \restriction \mathfrak{W}(y)) = \mathfrak{W}(r \restriction \mathfrak{W}(y))$, gilt $\mathfrak{Pr}\,\mathfrak{W}(r \restriction \mathfrak{W}(y))$, was wir

zunächst beweisen wollten. Daß $D\mathfrak{W}(r \upharpoonright \mathfrak{W}(y))$ gilt, folgt aus $\mathfrak{W}(r \upharpoonright \mathfrak{W}(y)) \subseteq \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A))$ und $\mathfrak{Pr}\mathfrak{W}(r \upharpoonright \mathfrak{W}(y))$. Wir zeigen nun, daß $\mathfrak{W}(r \upharpoonright \mathfrak{W}(y))$ $(\boldsymbol{Ausw})^D y$, d. h. daß $\exists x_0(x_0 = \mathfrak{W}(r \upharpoonright \mathfrak{W}(y)) \wedge y(\subseteq)^D (\boldsymbol{M})^D \wedge x_0(\subseteq)^D (\mathsf{U})^D y \wedge \forall x(Dx \to (x \in y \to \to \exists z(Dz \wedge \forall z_0(Dz_0 \to (z_0 \in x_0(\cap)^D x \leftrightarrow z = z_0))))))$ gilt. $y(\subset)^D (\boldsymbol{M})^D$ gilt nach Voraussetzung. Es sei $x_0 = \mathfrak{W}(r \upharpoonright \mathfrak{W}(y))$. Wir zeigen, daß $x_0(\subseteq)^D (\mathsf{U})^D y$ gilt. Dazu haben wir offenbar zu zeigen, daß $\exists x_1(x_1 = (\mathsf{U})^D y \wedge (\boldsymbol{Kl})^D x_0 \wedge (\boldsymbol{Kl})^D x_1 \wedge \forall x_2(Dx_2 \to (x_2 \in x_0 \to x_2 \subset x_1)))$ gilt. Es gilt $(\mathsf{U})^D y = \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(y))$, da nach [G/5.4] aus $\mathfrak{Pr}\mathfrak{W}(y)$ sofort $\mathfrak{Pr}\mathfrak{S}(\mathfrak{W}(y))$ folgt. Also existiert ein x_1 mit $x_1 = (\mathsf{U})^D y$. (Wir benutzen hier im Beweis von $(\mathrm{VI})^{\boldsymbol{D}}$ '$(\mathsf{U})^D$', und im Beweis von $(\mathrm{V})^{\boldsymbol{D}}$ benutzten wir '$([\,])^D$'. Es ist nachzutragen, daß in E '$([\,])^D$' als '$(D \wedge (\boldsymbol{El})^D)$'-Funktor und '$(\mathsf{U})^D$' als '$(D \wedge (\boldsymbol{Mengensyst})^D \wedge (\boldsymbol{Kl})^D)$'-Funktor einführbar sind. Gilt $(D \wedge (\boldsymbol{El})^D)\, x$ und $(D \wedge (\boldsymbol{El})^D)\, y$, so gilt $([\,])^D (x, y) = \langle \{\{x, y\}, (Kp_2^5 x + Kp_2^5 y) \dot{+} 1\rangle, \langle \{y\}, (Kp_2^5 y) \dot{+} 1\rangle\}, ((Kp_2^5 x + Kp_2^5 y) \dot{+} 1) \dot{+} 1\rangle$. Gilt $(D \wedge (\boldsymbol{Mengensyst})^D \wedge (\boldsymbol{Kl})^D \wedge \mathfrak{Pr})\, x$, so gilt $(\mathsf{U})^D x = \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(x))$. Gilt $(D \wedge (\boldsymbol{Mengensyst})^D \wedge (\boldsymbol{Kl})^D \wedge M)\, x$, so gilt $(\mathsf{U})^D x = \langle \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(Kp_1^5 x)), \mathfrak{S}(\mathfrak{D}(Kp_1^5 x))\rangle$, falls $\sim \mathfrak{S}(\mathfrak{D}(Kp_1^5 x)) \varepsilon \mathfrak{D}(Kp_1^5 x)$, und es gilt $(\mathsf{U})^D x = \langle \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(Kp_1^5 x)), \mathfrak{S}(\mathfrak{D}(Kp_1^5 x)) \dot{+} 1\rangle$, falls $\mathfrak{S}(\mathfrak{D}(Kp_1^5 x)) \varepsilon \mathfrak{D}(Kp_1^5 x)$. Wir bemerken noch, daß wir eigentlich nach 2.4. '$(\mathsf{U})^D (x)$' anstelle von '$(\mathsf{U})^D x$' schreiben müßten.) Nach 5.4.5.3. gilt $(\boldsymbol{Kl})^D x_0$ und $(\boldsymbol{Kl})^D x_1$, da $x_0 \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A)) \wedge \mathfrak{Pr}x_0$ und da $x_1 \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A)) \wedge \mathfrak{Pr}x_1$. Wir haben noch zu zeigen, daß $\forall x_2(Dx_2 \to \to (x_2 \in x_0 \to x_2 \in x_1))$ gilt. Gelte $Dx_2 \wedge x_2 \in x_0$. Dann gilt nach 5.4.3. $x_2 \varepsilon x_0$, da $x_0 = \mathfrak{W}(r \upharpoonright \mathfrak{W}(y)) \wedge \mathfrak{Pr}\mathfrak{W}(r \upharpoonright \mathfrak{W}(y)) \wedge \mathfrak{W}(r \upharpoonright \mathfrak{W}(y)) \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A))$. Nach 5.3. und wegen $x_0 = \mathfrak{W}(r \upharpoonright \mathfrak{W}(y))$ gibt es eine Menge v und eine Ordinalzahl α, so daß $x_2 \in \langle v, \alpha\rangle$ und $\langle v, \alpha\rangle \in y$ und $x_2 = r'v$. Da $x_1 = \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(y)) \wedge \mathfrak{Pr}\mathfrak{S}(\mathfrak{W}(y))$, gilt $x_2 \in x_1$. Wir haben noch $\forall x(Dx \to (x \in y \to \exists z(Dz \wedge \forall z_0(Dz_0 \to (z_0 \in x_0(\cap)^D x \leftrightarrow z = z_0)))))$ zu zeigen. Gelte $Dx \wedge x \in y$. Nach 5.4.3. gilt $x \varepsilon y$, da $\mathfrak{Pr}y$ gilt. Somit existiert eine Menge y_1 und eine Ordinalzahl ξ, so daß $x = \langle y_1, \xi\rangle$. Es gilt $r'y_1 \varepsilon y_1$ und $r'y_1 \varepsilon x_0$, also gilt $r'y_1 \in x$, $r'y_1 \in x_0$ und $Dr'y_1$, und somit gilt $r'y_1 \in x_0(\cap)^D x$. Da wegen $\mathfrak{Dis}\mathfrak{W}(y)$ nun $y_1 \cdot x_0 = \{r'y_1\}$, gilt auch $\forall z_0(Dz_0 \to (z_0 \in x_0(\cap)^D x \leftrightarrow r'y_1 = z_0))$.

Fall 2. Gelte $(D \wedge M \wedge (\boldsymbol{disj})^D)\, y \wedge y(\subseteq)^D (\boldsymbol{M})^D \wedge (\emptyset)^D (\sim\in)\, y$. Dann existiert nach 5.3. eine Menge y_0 und eine Ordinalzahl μ, so daß $y = \langle y_0, \mu\rangle$. Ferner gilt nach 5.3. $\mathfrak{D}(\mathfrak{W}(r \upharpoonright \mathfrak{W}(y_0))) \subseteq On$. Sei $s = \mathfrak{W}(r \upharpoonright \mathfrak{W}(y_0))$ und $t = \mathfrak{S}(\mathfrak{D}(s))$. Aus My und [G/7.3] folgt $t \varepsilon On$. Es gibt drei Möglichkeiten für t:

(1) $t \varepsilon \mathfrak{D}(s)$ (t ist die größte Ordinalzahl von $\mathfrak{D}(s)$),

(2) $\sim t \varepsilon \mathfrak{D}(s) \wedge \sim \mathfrak{D}(s) = 0$ (t ist die erste auf alle Ordinalzahlen von $\mathfrak{D}(s)$ folgende Ordinalzahl, und t ist nicht-leer),

(3) $\sim t \varepsilon \mathfrak{D}(s) \wedge \mathfrak{D}(s) = 0$ $(t = 0)$.

Gelte $t \varepsilon \mathfrak{D}(s)$. Wir zeigen, daß $D\langle s, t \dot{+} 1\rangle$ gilt. Da $s \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A \upharpoonright (t \dot{+} 1)))$ und da eine Menge u existiert, so daß $u \varepsilon s$ und $u \varepsilon A'(t \dot{+} 1)$, gilt $\langle s, t \dot{+} 1\rangle \varepsilon A'(t \dot{+} 1)$. Also gilt $\langle s, t \dot{+} 1\rangle \varepsilon \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A))$, und somit gilt nach 5.3. $D\langle s, t \dot{+} 1\rangle$. Ähnlich wie im Fall 1 zeigt man, daß $\langle s, t \dot{+} 1\rangle$ $(\boldsymbol{Ausw})^D y$ gilt.

Gelte $\sim t \varepsilon \mathfrak{D}(s) \wedge \sim \mathfrak{D}(s) = 0$. Wir zeigen, daß $D\langle s, t\rangle$ gilt. Da $s \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(A \restriction t))$ und da $\forall t_1 (t_1 \in t \to \exists t_2 (t_1 \in t_2 \to t_2 \in t \wedge s \cdot A' t_2 \neq 0))$, gilt $\langle s, t\rangle \varepsilon A' t$; also gilt $D\langle s, t\rangle$. Ähnlich wie im Fall 1 zeigt man, daß $\langle s, t\rangle (\textbf{\textit{Ausw}})^D y$ gilt.

Gelte $\sim t \varepsilon \mathfrak{T}(s) \wedge \mathfrak{T}(s) = 0$. Aus $\mathfrak{T}(s) = 0$ folgt $y = \langle 0, 1\rangle$. Es gilt Dy und $y (\textbf{\textit{Ausw}})^D y$.

5.5.13. Beweis von $(\mathrm{VII})^D$. $(\mathrm{VII})^D$ ist äquivalent zu $\forall u \forall v ((D \wedge (\textbf{\textit{Kl}})^D) u \wedge (D \wedge (\textbf{\textit{Kl}})^D) v \wedge \exists w (Dw \wedge (\textbf{\textit{Abb von auf}})^D w u v \wedge (\textbf{\textit{eineind}})^D w) \wedge u \in (\boldsymbol{M})^D \to v \in (\boldsymbol{M})^D)$. Gelte $(D \wedge (\textbf{\textit{Kl}})^D) u \wedge (D \wedge (\textbf{\textit{Kl}})^D) v \wedge u \in (\boldsymbol{M})^D$ und existiere ein w, so daß $Dw \wedge (\textbf{\textit{Abb von auf}})^D w u v \wedge (\textbf{\textit{eineind}})^D w$ gilt. Aus $u \in (\boldsymbol{M})^D$ folgt nach 5.5.10.4., daß es eine Menge u_0 und eine Ordinalzahl $\mu \neq 0$ gibt, so daß $u = \langle u_0, \mu\rangle$ und $u \varepsilon A' \mu$. Angenommen, es gelte $v (\sim \in) (\boldsymbol{M})^D$. Dann gilt wegen $(D \wedge (\textbf{\textit{Kl}})^D) v$ nach 5.4.5.3. $\mathfrak{Pr} v$. Aus $\mathfrak{Pr} v$ folgt aber $\mathfrak{Pr} w$; denn würde Mw gelten, so würde nach 5.3. eine Menge w_0 und eine Ordinalzahl γ existieren, so daß $w = \langle w_0, \gamma\rangle$. Da $v \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(\mathfrak{S}(w_0))))))$ gilt, würde nach [G/5.112] und nach [G/5.12] Mv im Widerspruch zu $\mathfrak{Pr} v$ gelten. Da nach 5.3. und nach 5.4.3. $\forall s \forall t ((\lceil\ \rceil)^D (t, s) \in w \leftrightarrow \leftrightarrow \exists s_0 \exists t_0 \exists \alpha \exists \beta (Ms_0 \wedge Mt_0 \wedge s = \langle s_0, \alpha\rangle \wedge t = \langle t_0, \beta\rangle \wedge \langle \{\langle t, s\rangle, (\alpha \dot{+} \beta) \dot{-} 1\rangle, \langle \{s\}, \alpha \dot{+} 1\rangle\}, ((\alpha \dot{+} \beta) \dot{+} 1) \dot{+} 1\rangle \varepsilon w))$ gilt, gibt es nach [G/M 4] genau eine Relation r, so daß $\forall s \forall t (Ms \wedge Mt \to (\langle s, t\rangle \varepsilon r \leftrightarrow (\lceil\ \rceil)^D (t, s) \in w))$ gilt. Aus $(\textbf{\textit{eineind}})^D w$ folgt $\mathfrak{Un}_2 r$, also gilt insbesondere $\mathfrak{Un} r$, und somit gilt $r \mathfrak{Fn} u_0$ und $\mathfrak{W}(r) = v$. Nach [G/5.19] erhalten wir Mr, und somit gilt nach [G/5.16] Mr im Widerspruch zu $\mathfrak{Pr} v$. Also gilt $v \in (\boldsymbol{M})^D$.

5.6. Neben der in 5.3. angegebenen definitorischen Erweiterung E von G^+ bzgl. $(\mathsf{AM})^D$ soll noch eine zweite definitorische Erweiterung E' von G^+ bzgl. $(\mathsf{AM})^D$ angegeben werden. Die zweite Konstruktion unterscheidet sich von der ersten dadurch, daß wir nicht mehr sämtliche Ordinalzahlen zur Indizierung[1]) (Bildung der in 5.3. beschriebenen geordneten Paare, wobei an zweiter Stelle stets eine Ordinalzahl steht) benutzen, sondern nur noch die beiden Ordinalzahlen 0 und 1; dafür benötigen wir aber noch einen einstelligen Funktor 'R', der uns zu einer Stufung verhilft. Auch bei der zweiten Konstruktion kann man von einer beliebigen unendlichen Menge von G^+ ausgehen. Wir nehmen wieder die Menge ω der natürlichen Zahlen als Ausgangspunkt der Konstruktion.

5.7. Nach Gödel 1940, [G/7.5], existiert in G (und damit auch in G^+) 'B' $=_{\mathrm{Df}}$ '$\iota y (y \mathfrak{Fn} On \wedge y' 0 = \omega \wedge 1 \wedge \forall x (\exists z z \varepsilon x \wedge x \varepsilon On \to y' x = \mathfrak{P}(\mathfrak{S}(y'' x)) \setminus \{1\}))$'. Durch die Festsetzung '$R(x)$' $=_{\mathrm{Df}}$ '$\iota y ((x \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(B)) \wedge \sim Mx \to y = On) \wedge (\sim (x \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(B)) \wedge \sim Mx) \to y = \mathfrak{F}(\mathfrak{T}((\mathfrak{T}(\{x\}) \restriction E) \cdot \mathfrak{W}(B)) \restriction B))))$' ist in G (und damit auch in G^+) der einstellige Funktor 'R' eingeführt, da die Unizitätsbedingung in G beweisbar ist. (Gilt $x \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(B)) \wedge \sim Mx$, so gilt $R(x) = On$; gilt $\exists \alpha x \varepsilon B' \alpha$, so ist $R(x)$ die kleinste Ordinalzahl β, für die $x \varepsilon B' \beta$ gilt; sonst gilt $R(x) = V$.)

[1]) Die Methode der Indizierung wurde vom Verfasser in Übertragung von Ergebnissen von Mostowski (vgl. Mostowski 1939, Mostowski 1945) auch zur Konstruktion von Nichtstandardmodellen der einfachen Typentheorie benutzt. Über Ergebnisse in dieser Richtung wurde auf der wissenschaftlichen Jahrestagung der Mathematischen Gesellschaft der DDR in Karl-Marx-Stadt am 11. 9. 1964 berichtet.

Durch die Festsetzung '$Rg' =_{Df}$ '$\iota z \forall w(wEz \leftrightarrow \exists x(xE\mathfrak{S}(\mathfrak{W}(B)) \wedge w = \langle R(x), x\rangle))$' ist in G (und damit auch in G^+) die Individuenkonstante 'Rg' eingeführt, da die Unizitätsbedingung in G beweisbar ist.

Es gilt:

(1) $\vdash_G \forall x \forall y(0Ex \wedge xEy \wedge yE On \rightarrow B'x \subseteq B'y)$,

(2) $\vdash_G \forall x \forall y(xEy \wedge yE On \rightarrow B'x \neq B'y)$,

(3) $\vdash_G \mathfrak{Un}\, Rg \wedge \mathfrak{Rel}\, Rg \wedge \mathfrak{Fnc}\, Rg \wedge Rg \subseteq On \times \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(B)) \wedge Rg\, \mathfrak{Fn}\, \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(B)) \wedge$
$\wedge\, \mathfrak{W}(Rg) = On \wedge \mathfrak{Pr}\, Rg$.

Beweise.

(1) Gelte $0Ex \wedge xEy \wedge yE On$. Wegen xEy gilt nach [G/7.11] und nach [G/4.86] $B''x \subseteq B''y$. Da $B'x = \mathfrak{P}(\mathfrak{S}(B''x)) \times \{1\}$ und $B'y = \mathfrak{P}(\mathfrak{S}(B''y)) \times \{1\}$, gilt wegen $B''x \subseteq B''y$ nach [G/4.85] und [G/4.86] $B'x \subseteq B'y$.

(2) Gelte $xEy \wedge yE On$.
   (a) Gelte $x = 0$. Dann gilt $B'x \neq B'y$, da $B'x = \omega \times 1$ und $B'y = \mathfrak{P}(\mathfrak{S}(B''y)) \times \{1\}$.
   (b) Gelte $\sim x = 0$. Angenommen, $B'x = B'y$. Da $B'x = \mathfrak{P}(\mathfrak{S}(B''x)) \times \{1\}$ und $B'y = \mathfrak{P}(\mathfrak{S}(B''y)) \times \{1\}$, gilt wegen $B'x = B'y$ auch $\mathfrak{S}(B''x) = \mathfrak{S}(B''y)$. Da nach dem Beweis von (1) $B''x \subseteq B''y$, gilt wegen $\mathfrak{S}(B''x) = \mathfrak{S}(B''y)$ und wegen (1) $B''x = B''y$. Aus $B''x = B''y$ folgt wegen xEy, daß $B'xEB''x$ gilt. Daher muß es ein z geben, so daß $\sim z = 0 \wedge zEx \wedge B'z = B'x$. z_0 sei das kleinste solche z. Aus $\sim z_0 = 0 \wedge z_0 E x \wedge B'z_0 = B'x$ folgt aber, daß es ein z_1 gibt, so daß $\sim z_1 = 0 \wedge z_1 E z_0 \wedge B'z_1 = B'z_0$ gilt. Also gilt auch $\sim z_1 = 0 \wedge z_1 E x \wedge B'z_1 = B'x$. Dieses Ergebnis widerspricht der Tatsache, daß z_0 das kleinste z mit $\sim z = 0 \wedge zEx \wedge B'z = B'x$ ist.

(3) Aus der Einführung der Klasse Rg folgt sofort $\mathfrak{Un}\, Rg$, $\mathfrak{Rel}\, Rg$, $\mathfrak{Fnc}\, Rg$, $Rg \subseteq On \times \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(B))$ und $Rg\, \mathfrak{Fn}\, \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(B))$. $\forall x \forall y(0Ex \wedge xEy \wedge yE On \rightarrow B'x \subset B'y)$ ergibt sich aus (1) und (2). Daher gilt $\mathfrak{W}(Rg) = On$. Aus $\mathfrak{W}(Rg) = On$ folgt nach [G/5.16] und nach [G/7.17] $\mathfrak{Pr}\, Rg$.

Die folgenden Aussagen (genauer: Aussagen bzgl. der Menge der nicht-logischen Konstanten 'M', 'E', 'D', '$\subset$' und '$\sqsubset$') sind mögliche Definitionen der nicht-logischen Konstanten von $(\mathsf{AM})^D$ in G (und damit auch in G^+):

'$\forall x(Dx \leftrightarrow xE\mathfrak{S}(\mathfrak{W}(B)) \vee xE\mathfrak{S}(\mathfrak{W}(B)) \wedge \sim Mx)$',

'$\forall x \forall y(x \in y \leftrightarrow y \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(B)) \wedge \sim My \wedge xEy \vee yE\mathfrak{S}(\mathfrak{W}(B)) \wedge$
$\wedge \exists z(Mz \wedge y = \langle z, 1\rangle \wedge xEz))$',

'$\forall x \forall y(x \sqsubset y \leftrightarrow (xE\mathfrak{S}(\mathfrak{W}(B)) \vee x \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(B)) \wedge \sim Mx) \wedge (yE\mathfrak{S}(\mathfrak{W}(B)) \vee$
$\vee\, y \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(B)) \wedge \sim My) \wedge R(x) \leqq R(y))$'.

Wir erklären eine Erweiterungstheorie E' von G^+:

(1) Die Konstanten von E' seien die Konstanten von G^+ und die Konstanten von $(\mathsf{AM})^D$.

(2) Die Axiome von E' seien die Axiome von G^+ und die eben angegebenen möglichen Definitionen der nicht-logischen Konstanten von $(\mathsf{AM})^D$ in G^+.

Um zu zeigen, daß E' eine definitorische Erweiterung von G^+ bzgl. $(\mathsf{AM})^D$ ist, haben wir zu bestätigen, daß sämtliche nicht-logischen Axiome von $(\mathsf{AM})^D$ in E' beweisbar sind.

5.8. Wir beginnen mit einigen Vorbereitungen für die Beweise der nicht-logischen Axiome von $(\mathsf{AM})^D$ in E'. Die Abschnitte 5.4.1. bis 5.4.4. und die Abschnitte 5.4.5.1. bis 5.4.5.5. lassen sich für B und E' anstelle von A und E wiederholen. Wir erhalten so die Abschnitte 5.8.1. bis 5.8.4. und die Abschnitte 5.8.5.1. bis 5.8.5.5.

5.8.5.6. $\vdash_{\mathsf{E}'} \forall x \forall y (x (\square)^D y \leftrightarrow x \square y)$,
$\vdash_{\mathsf{E}'} \forall x \forall y (x (\square)^D y \leftrightarrow Dx \wedge Dy \wedge R(x) = R(y))$.

5.8.5.7. $\vdash_{\mathsf{E}'} \forall x \forall y (x (\sqsubset)^D y \leftrightarrow x \sqsubset y)$,
$\vdash_{\mathsf{E}'} \forall x \forall y (x (\sqsubset)^D y \leftrightarrow Dx \wedge Dy \wedge R(x) \varepsilon R(y))$.

5.8.6. $\vdash_{\mathsf{G}} \forall x (Mx \rightarrow (x \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(B)) \leftrightarrow \exists y (\sim y = 0 \wedge y \varepsilon On \wedge \langle x, 1 \rangle \varepsilon B' y)))$.

Beweis.

(1) Gilt $Mx \wedge \exists y (\sim y = 0 \wedge y \varepsilon On \wedge \langle x, 1 \rangle \varepsilon B' y)$, so gilt nach 5.7. $x \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(B))$.

(2) Gelte $Mx \wedge x \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(B))$. Dann gilt nach 5.7. $Rg'' x \subseteq On$. Nach [G/5.1] gilt $M Rg'' x$, da $Mx \wedge \mathfrak{Un} Rg$ gilt. Nach [G/5.122] gilt $M \mathfrak{S}(Rg'' x)$, nach [G/7.3] gilt $\mathfrak{Ord} \mathfrak{S}(Rg'' x)$, nach [G/6.61] gilt $\mathfrak{O} \mathfrak{S}(Rg'' x)$, nach [G/6.62] gilt $\mathfrak{S}(Rg'' x) \varepsilon On$. Da $\forall z (z \varepsilon Rg'' x \rightarrow z \subseteq \mathfrak{S}(Rg'' x))$ gilt, gilt nach 5.7. $\langle x, 1 \rangle \varepsilon B' (\mathfrak{S}(Rg'' x) \dotplus 1)$.

5.9. Es folgen die Beweise der nicht-logischen Axiome von $(\mathsf{AM})^D$ in E'.

5.9.1. Beweis von '$\exists x Dx$'. Es gilt zum Beispiel $D\langle 0, 0 \rangle$ oder $D\langle 0, 1 \rangle$.

5.9.2. Die Beweise der Axiome $(\mathrm{I}.1)^D$, $(\mathrm{I}.2)^D$ und $(\mathrm{I}.3)^D$ ergeben sich sofort aus den Definitionen der Prädikate $\boldsymbol{D}$ und '$\square$' von $(\mathsf{AM})^D$ in E'.

5.9.3. Beweis des Axioms $(\mathrm{I}.4)^D$, das zu $\forall z (\exists x x \in z \rightarrow \exists x (x \in z \wedge \forall y (y \in z \rightarrow x \square y)))$ äquivalent ist. Gelte $\exists x x \in z$. Also gilt Dz.

(1) Gelte $\sim Mz$. Dann gilt $z \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(B))$. Da $\exists x x \in z$ gilt, gilt $Rg'' z \neq 0$ und $Rg'' z \subseteq On$. $\mathfrak{I}(Rg'' z)$ ist die kleinste Ordinalzahl von $Rg'' z$. Gilt $\mathfrak{I}(Rg'' z) = 0$, so gibt es eine natürliche Zahl u mit $\langle u, 0 \rangle \varepsilon z$. Gilt $\mathfrak{I}(Rg'' z) \neq 0$, so existiert eine Menge v, so daß $\langle v, 1 \rangle \varepsilon z$ und $Rg' \langle v, 1 \rangle = \mathfrak{I}(Rg'' z)$. Nach den Definitionen der Prädikate '$\in$' und '$\square$' von $(\mathsf{AM})^D$ in E' gilt auch $\langle u, 0 \rangle \in z$ bzw. $\langle v, 1 \rangle \in z$ und $\forall y (y \in z \rightarrow \langle u, 0 \rangle \square y)$ bzw. $\forall y (y \in z \rightarrow \langle v, 1 \rangle \square y)$.

(2) Gelte Mz. Dann gilt $z \varepsilon \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(B))$, da Dz gilt. Da $\exists x x \in z$ gilt, existiert eine Menge $z_0 \neq 0$ und eine Ordinalzahl $\alpha \neq 0$, so daß $z = \langle z_0, 1 \rangle$ und $z \varepsilon B' \alpha$. Nach 5.7. gilt $z_0 \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(B))$. Da $\exists x x \in z$, gilt $Rg'' z_0 \neq 0$ und $Rg'' z_0 \subseteq On$. Gilt $\mathfrak{I}(Rg'' z_0) = 0$, so gilt für eine natürliche Zahl u $\langle u, 0 \rangle \varepsilon z_0$; also gilt $\langle u, 0 \rangle \in z$ und $\forall y (y \in z \rightarrow \langle u, 0 \rangle \square y)$. Gilt $\mathfrak{I}(Rg'' z_0) \neq 0$, so existiert eine Menge v, so daß $\langle v, 1 \rangle \varepsilon z_0$ und $Rg' \langle v, 1 \rangle = \mathfrak{I}(Rg'' z_0)$; also gilt $\langle v, 1 \rangle \in z$ und $\forall y (y \in z \rightarrow \langle v, 1 \rangle \square y)$.

5.9.4. Beweis des Axioms $(\mathrm{I}.5)^D$ von $(\mathsf{AM})^D$, das äquivalent zu dem Axiom I.5 von AM ist. Gelte $\exists x x \in z$. Dann gilt Dz.

(1) Gelte $\sim Mz$. Dann gilt $R(z) = On$, und somit gilt $\forall x(x \in z \to x \vdash z)$. Angenommen, es gibt ein y mit $y \vdash z \wedge \forall x(x \in z \to x \vdash y)$. Dann folgt nach 5.7. $z \subseteq B^{\cdot}R(y)$. Aus $z \subseteq B^{\cdot}R(y)$ folgt nach [G/5.12] Mz im Widerspruch zu $\sim Mz$.

(2) Gelte Mz. Aus der Definition von '$\in$' in E' und aus $\exists x x \in z$ folgt, daß es eine Menge z_0 gibt, so daß $z = \langle z_0, 1\rangle$ und $z_0 \neq 0$ gilt. Ist $x \in z$, so gilt $x \varepsilon z_0$, und somit gilt $R(x) \varepsilon R(z)$. Also gilt $\forall x(x \in z \to x \vdash y)$. Angenommen, es gibt ein y mit $y \vdash z \wedge \forall x(x \in z \to x \vdash y)$. Aus $y \vdash z$ folgt $R(y) \varepsilon R(z)$. Aus $\forall x(x \in z \to x \vdash y)$ folgt $R(z) \leqq R(y)$. Damit haben wir einen Widerspruch.

5.9.5. Beweis des Axioms $(\mathrm{I}.6)^D$ von $(\mathsf{AM})^D$, das äquivalent ist zu $\forall y \forall z(Dy \wedge Dz \wedge (\boldsymbol{Kl})^D y \wedge (\boldsymbol{Kl})^D z \wedge \sim \exists x x \in z \to z \ldots y)$. Aus $Dz \wedge (\boldsymbol{Kl})^D z \wedge \sim \exists x x \in z$ erhält man nach 5.7. und 5.8., daß $z = \langle 0, 1\rangle$ gilt. Aus $Dy \wedge (\boldsymbol{Kl})^D y$ erhält man nach 5.8.5.3., daß $\exists \lambda(\lambda \neq 0 \wedge y \varepsilon B^{\cdot}\lambda) \wedge y \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(B)) \wedge \sim My$ gilt. Da $R(z) = 1$ und $R(z) \leqq R(y)$, gilt $z \sqsubset y$.

5.9.6. Beweis des Axioms $(\mathrm{I}.7)^D$ von $(\mathsf{AM})^D$, das zu Axiom I.7 von AM äquivalent ist. Gilt $\boldsymbol{El}x$, so existiert nach 5.8.5.1. eine Ordinalzahl α, so daß $x \varepsilon B^{\cdot}\alpha$. Nach 5.7. gilt $\langle B^{\cdot}\alpha, 1\rangle \varepsilon B^{\cdot}(\alpha \dot{+} 1)$. Nach 5.7. und nach 5.8.5.1. gilt $\boldsymbol{El}\langle B^{\cdot}\alpha, 1\rangle \wedge x \vdash \langle B^{\cdot}\alpha, 1\rangle$, da $R(x) \varepsilon \alpha$ und $R(\langle B^{\cdot}\alpha, 1\rangle) = \alpha \dot{+} 1$.

5.9.7. Beweis des Axiomenschemas $(\mathrm{II})^D$. Die Axiome dieses Schemas sind äquivalent zu den Axiomen des Schemas: $\forall a_1 \ldots \forall a_n \exists b(Da_1 \wedge \cdots \wedge Da_n \to Db \wedge (\boldsymbol{Kl})^D b \wedge \forall a(a \in b \leftrightarrow \boldsymbol{El}a \wedge (H(a, a_1, \ldots, a_n))^D))$. Gelte $Da_1 \wedge \cdots \wedge Da_n$. Aus den Definitionen der nicht-logischen Konstanten von $(\mathsf{AM})^D$ in E' und aus den Axiomen des Schemas B^+ folgt die Existenz einer Klasse u, so daß $\forall a(a \varepsilon u \leftrightarrow \boldsymbol{El}a \wedge (H(a, a_1, \ldots, a_n))^D)$ gilt.

(1) Gelte $\sim Mu$. Dann gilt Du, denn nach 5.8.5.1. gilt $u \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(B))$. Nach 5.8.5.3. gilt $(\boldsymbol{Kl})^D u$, und nach 5.8.3. gilt $\forall a(a \varepsilon u \leftrightarrow a \in u)$. Also gilt $Du \wedge (\boldsymbol{Kl})^D u \wedge \forall a(a \in u \leftrightarrow \boldsymbol{El}a \wedge (H(a, a_1, \ldots, a_n))^D)$.

(2) Gelte Mu. Es gilt $Rg^{\cdot\cdot}u \subseteq On$. Da auch $u \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(B))$ nach 5.8.5.1. (für alle Elemente r von u gilt $\boldsymbol{El}r$), gilt nach 5.8.6. $\langle u, 1\rangle \varepsilon B^{\cdot}(\mathfrak{S}(Rg^{\cdot\cdot}u) \dot{-} 1)$. Also gilt nach 5.7. $D\langle u, 1\rangle$. Nach 5.8.5.3. gilt $(\boldsymbol{Kl})^D \langle u, 1\rangle$. Nach 5.7. gilt $\forall x(x \varepsilon u \leftrightarrow x \in \langle u, 1\rangle)$. Somit gilt $D\langle u, 1\rangle \wedge (\boldsymbol{Kl})^D \langle u, 1\rangle \wedge \forall a(a \in \langle u, 1\rangle \leftrightarrow \boldsymbol{El}a \wedge (H(a, a_1, \ldots, a_n))^D)$.

5.9.8. Beweis des Axioms $(\mathrm{III})^D$, das äquivalent zu $\forall u \forall v(Du \wedge (\boldsymbol{Kl})^D u \wedge Dv \wedge (\boldsymbol{Kl})^D v \wedge \forall x(x \in u \leftrightarrow x \in v) \to u = v)$ ist. Gelte $Du \wedge (\boldsymbol{Kl})^D u \wedge Dv \wedge (\boldsymbol{Kl})^D v \wedge \forall x(x \in u \leftrightarrow x \in v)$.

(1) Gelte $\mathfrak{Pr}u \wedge \mathfrak{Pr}v$. Aus $\forall x(x \in u \leftrightarrow x \in v)$ folgt nach 5.8.3. $\forall x(x \varepsilon u \leftrightarrow x \varepsilon v)$. Also gilt nach Axiom A3 $u = v$.

(2) Gelte $Mu \wedge Mv$. Dann existieren zwei Mengen u_0 und v_0, so daß $u = \langle u_0, 1\rangle$ und $v = \langle v_0, 1\rangle$ und $\forall x(x \varepsilon u_0 \leftrightarrow x \varepsilon v_0)$ gilt. Also gilt nach Axiom A3 $u_0 = v_0$, und somit gilt $u = v$.

(3) Daß $\mathfrak{Pr}u \wedge Mv$ (bzw. daß $Mu \wedge \mathfrak{Pr}v$) gilt, ist wegen $\forall x(x \in u \leftrightarrow x \in v)$ nicht möglich.

5.9.9. Beweis von $(\mathrm{IV})^D$. Dieses Axiom ist äquivalent zu $\forall y \exists z(\boldsymbol{El}y \rightarrow (\boldsymbol{Me})^D z \wedge \wedge \forall x(x \in z \leftrightarrow x \sqsubset y))$. Gelte $\boldsymbol{El}y$. Also gilt nach 5.8.5.1. $\exists \alpha y \varepsilon B'\alpha$.

(1) Gelte $R(y) = 0$. Dann gilt $(\boldsymbol{Me})^D \langle 0, 1\rangle \wedge \forall x(x \in \langle 0, 1\rangle \leftrightarrow x \sqsubset y)$.

(2) Gelte $R(y) \neq 0$. Dann gilt $\langle \mathfrak{S}(B''R(y)), 1\rangle \varepsilon B'R(y)$ und $R(\langle \mathfrak{S}(B''R(y)), 1\rangle) = = R(y)$. Also gilt nach 5.8.5.3. und nach 5.7.

$$(\boldsymbol{Me})^D \langle \mathfrak{S}(B''R(y)), 1\rangle \wedge \forall x(x \in \langle \mathfrak{S}(B''R(y)), 1\rangle \leftrightarrow x \sqsubset y).$$

5.9.10.

1. $\vdash_{\mathsf{E}'}(\emptyset)^D = \langle 0, 1\rangle$,
2. $\vdash_{\mathsf{E}'}(\boldsymbol{E})^D = \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(B))$,
3. $\vdash_{\mathsf{E}'}(\boldsymbol{I})^D = \langle B'0, 1\rangle$,
4. $\vdash_{\mathsf{E}'}(\boldsymbol{M})^D = \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(B)) - B'0$.

Beweis. Diese Ergebnisse erhält man aus 2.3., 5.7., 5.8.4. und 5.8.5.

5.9.11. Beweis von Axiom $(\mathrm{V})^D$. Der Beweis von $(\mathrm{V})^D$ in E' verläuft analog dem Beweis von $(\mathrm{V})^D$ in E. (Anstelle von 'A' steht jetzt 'B', und im letzten Satz von 5.5.11. hat '$\langle \mathfrak{W}(Nf_1), 1\rangle$' anstelle von '$\langle \mathfrak{W}(Nf_1), 3\rangle$' zu stehen. Wie in E (vgl. 5.5.12.) ist auch in E' '$([\,])^D$' als '$(D \wedge (\boldsymbol{El})^D)$'-Funktor einführbar und '$(\bigcup)^D$' als '$(D \wedge \wedge (\boldsymbol{Mengensyst})^D \wedge (\boldsymbol{Kl})^D)$'-Funktor. Gilt $(D \wedge (\boldsymbol{El})^D)\, x \wedge (D \wedge (\boldsymbol{El})^D)\, y$, so gilt $([\,])^D (x, y) = \langle \{\langle \{x, y\}, 1\rangle, \langle \{y\}, 1\rangle\}, 1\rangle$. Gilt $(D \wedge (\boldsymbol{Mengensyst})^D \wedge (\boldsymbol{Kl})^D \wedge \mathfrak{Pr})x$, so gilt $(\bigcup)^D x = \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(x))$. Gilt $(D \wedge (\boldsymbol{Mengensyst})^D \wedge (\boldsymbol{Kl})^D \wedge M)\, x$, so gilt $(\bigcup)^D x = = \langle \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(x)), 1\rangle$.)

5.9.12. Beweis von Axiom $(\mathrm{VI})^D$: $\forall y(Dy \rightarrow \exists z(Dz \wedge (\exists z_1(Dz_1 \wedge z_1 = (\boldsymbol{M})^D \wedge y(\subseteq)^D z_1) \wedge (\boldsymbol{disj})^D y \wedge \exists z_2(Dz_2 \wedge z_2 = (\emptyset)^D \wedge \sim z_2 \in y) \rightarrow z(\boldsymbol{Ausw})^D y)))$. Nach Axiom E gibt es eine Klasse r, so daß $\mathrm{Un}r \wedge \forall x(Mx \wedge \sim \mathfrak{Em}x \rightarrow \exists y(My \wedge y \varepsilon x \wedge \langle y, x\rangle \varepsilon r))$ gilt.

Fall 1. Gelte $(D \wedge \mathfrak{Pr} \wedge (\boldsymbol{disj})^D) y \wedge y(\subseteq)^D (\boldsymbol{M})^D \wedge (\emptyset)^D (\sim\in) y$. Da $(\emptyset)^D (\sim\in) y$, gilt $\sim 0 \varepsilon \mathfrak{W}(y)$, und da $(\boldsymbol{disj})^D y$, gilt $\mathfrak{Dis}\mathfrak{W}(y)$. Wir werden zeigen, daß $D\mathfrak{W}(r \restriction \mathfrak{W}(y)) \wedge \mathfrak{W}(r \restriction \mathfrak{W}(y))\, (\boldsymbol{Ausw})^D y$ gilt. Dazu zeigen wir zunächst, daß $\sim M \mathfrak{W}(r \restriction \mathfrak{W}(y))$ gilt. Da $y = \mathfrak{W}(y) \times \{1\}$, gilt nach [G/5.18] $\sim M \mathfrak{W}(y)$. Aus $\mathfrak{Dis}\mathfrak{W}(y)$ folgt $\mathrm{Un}_2 r \restriction \mathfrak{W}(y)$. Da $\mathfrak{W}(y) \subseteq \mathfrak{D}(r)$, gilt nach [G/4.51] $\mathfrak{D}(r \restriction \mathfrak{W}(y)) = \mathfrak{W}(y)$. Es gilt $\sim M r \restriction \mathfrak{W}(y)$, da sonst nach [G/5.14] $M \mathfrak{D}(r \restriction \mathfrak{W}(y))$ im Widerspruch zu $\sim M \mathfrak{W}(y)$ $\mathfrak{W}(y) = \mathfrak{D}(r \restriction \mathfrak{W}(y))$ gelten würde. Aus [G/5.44] folgt $\sim M (r \restriction \mathfrak{W}(y))'' \mathfrak{W}(y)$. Da nach [G/4.52] $(r \restriction \mathfrak{W}(y))'' \mathfrak{W}(y) = \mathfrak{W}(r \restriction \mathfrak{W}(y))$, gilt $\sim M \mathfrak{W}(r \restriction \mathfrak{W}(y))$, was wir zunächst beweisen wollten. Aus $\mathfrak{W}(r \restriction \mathfrak{W}(y)) \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(B))$ und $\sim M \mathfrak{W}(r \restriction \mathfrak{W}(y))$ ergibt sich $D\mathfrak{W}(r \restriction \mathfrak{W}(y))$. Es bleibt noch zu zeigen, daß $\mathfrak{W}(r \restriction \mathfrak{W}(y))\, (\boldsymbol{Ausw})^D y$ gilt, d. h. daß $\exists x_0(x_0 = \mathfrak{W}(r \restriction \mathfrak{W}(y)) \wedge y(\subseteq)^D (\boldsymbol{M})^D \wedge x_0(\subseteq)^D (\bigcup)^D y \wedge \forall x(Dx \rightarrow (x \subseteq y \rightarrow \exists z(Dz \wedge \forall z_0(Dz_0 \rightarrow (z_0 \in x_0(\cap)^D x \leftrightarrow z = z_0))))))$. $y(\subseteq)^D (\boldsymbol{M})^D$ gilt nach Voraussetzung. Sei $x_0 = \mathfrak{W}(r \restriction \mathfrak{W}(y))$. Wir zeigen $x_0(\subseteq)^D (\bigcup)^D y$, d. h. wir zeigen, daß $\exists x_1(x_1 = (\bigcup)^D y \wedge (\boldsymbol{Kl})^D x_0 \wedge (\boldsymbol{Kl})^D x_1 \wedge \forall x_2(Dx_2 \rightarrow (x_2 \in x_0 \rightarrow x_2 \in x_1)))$. Es

gilt $(\mathsf{U})^D y = \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(y))$, und somit existiert ein x_1, so daß $x_1 = (\mathsf{U})^D y$. Da $x_0 \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(B)) \wedge \mathfrak{Pr} x_0$ und da $x_1 \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(B)) \wedge \mathfrak{Pr} x_1$, gilt nach 5.8.5.3. $(\boldsymbol{Kl})^D x_0 \wedge$ $\wedge (\boldsymbol{Kl})^D x_1$. Es bleibt noch zu zeigen, daß $\forall x_2 (Dx_2 \to (x_2 \in x_0 \leftrightarrow x_2 \in x_1))$ gilt. Gelte $Dx_2 \wedge x_2 \in x_0$. Dann gilt nach 5.8.3. $x_2 \varepsilon x_0$, da $x_0 = \mathfrak{W}(r \upharpoonright \mathfrak{W}(y)) \wedge$ $\wedge \sim M \mathfrak{W}(r \upharpoonright \mathfrak{W}(y)) \wedge \mathfrak{W}(r \upharpoonright \mathfrak{W}(y)) \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(B))$ gilt. Nach 5.7. gibt es eine Menge r, so daß $x_2 \in \langle v, 1\rangle \wedge \langle v, 1\rangle \in y \wedge x_2 = r`v$ gilt. Da $x_1 = \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(y)) \wedge x_1 \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{W}(B)) \wedge$ $\wedge \sim M x_1$, gilt $x_2 \in x_1$. Nun zeigen wir, daß $\forall x (Dx \to (x \in y \to \exists z (Dz \wedge \forall z_0 (Dz_0 \to$ $\to (z_0 \in x_0 (\cap)^D x \leftrightarrow z = z_0)))))$ gilt. Gelte $Dx \wedge x \in y$. Da $\mathfrak{Pr} y \wedge y (\subseteq)^D (\boldsymbol{M})^D$, gilt nach 5.8.3. und nach 5.9.10.4. $x \varepsilon y$. Also existiert nach 5.9.10.4. und nach 5.7. eine Menge y_1, so daß $x = \langle y_1, 1\rangle$. Es gilt $r`y_1 \varepsilon y_1$ und $r`y_1 \varepsilon x_0$, also gilt $r`y_1 \in x$, $r`y_1 \in x_0$ und $Dr`y_1$, und somit gilt $r`y_1 \in x_0 (\cap)^D x$. Da wegen $\mathfrak{Dis}\mathfrak{W}(y)$ $y_1 \cdot x_0 = \{r`y_1\}$, gilt auch $\forall z_0 (Dz_0 \to (z_0 \in x_0 (\cap)^D x \leftrightarrow r`y_1 = z_0))$.

Fall 2. Gelte $(D \wedge M \wedge (\boldsymbol{disj})^D) y \wedge y (\subseteq)^D (\boldsymbol{M})^D \wedge (\emptyset)^D (\sim\in) y$. Dann existiert nach 5.7. eine Menge y_0, so daß $y = \langle y_0, 1\rangle$. Ähnlich wie im Fall 1 zeigt man, daß $\langle \mathfrak{W}(r \upharpoonright \mathfrak{W}(y_0)), 1\rangle (\boldsymbol{Ausw})^D y$ gilt.

5.9.13. Der Beweis von $(\mathrm{VII})^D$ in E' verläuft analog dem Beweis von $(\mathrm{VII})^D$ in E.

6. Die relative Konsistenz von AM^- bzgl. G

In der Untertheorie AM^- von AM ist stets zu beachten, daß wir das Komprehensionsaxiomenschema II nur noch in der eingeschränkten Form II^- zur Verfügung haben. Wir wollen zeigen, daß auch in AM^- die Aussagen '$\exists x x = \emptyset$', '$\exists x x = \boldsymbol{E}$', '$\exists x x = \boldsymbol{I}$' und '$\exists x x = \boldsymbol{M}$' beweisbar sind. Für die ersten beiden Aussagen ist das klar, da man bei ihnen sofort mit dem Schema II^- zum Ziel kommt. Anders verhält es sich mit den letzten beiden Aussagen, da die Ausdrücke '$\boldsymbol{Ur}x$' und '$\boldsymbol{Me}x$' nicht primitiv sind. Wir wollen aber zeigen, daß es zu ihnen äquivalente primitive Ausdrücke gibt. Nach 4.1. genügt es, zu '$\boldsymbol{Ur}x$' einen äquivalenten primitiven Ausdruck zu finden. Wir behaupten, daß '$\exists y x \in y \wedge \forall y (\exists z y \in z \to x \sqsubset y)$' ein zu '$\boldsymbol{Ur}x$' äquivalenter primitiver Ausdruck ist. Zunächst folgt aus 4.3. sofort, daß dieser Ausdruck primitiv ist, und nach 4.1. genügt es zu zeigen, daß '$((\exists y x \in y \wedge \forall y (\exists z y \in z \to$ $\to x \sqsubset y)) \to \boldsymbol{Ur}x)$' in AM^- beweisbar ist. Gelte also $(\exists y x \in y \wedge \forall y (\exists z y \in z \to$ $\to x \sqsubset y))$. Angenommen, es gilt $\sim \exists z y \in z$ und $\sim x \quad y$ (also $y \vdash x$). Dann gilt nach Axiom IV $y \in \boldsymbol{M}u \vdash x$ im Widerspruch zu $\sim \exists z y \in z$. Also gilt $\boldsymbol{Ur}x$.

Wir zeigen die relative Konsistenz von AM^- bzgl. G, indem wir nachweisen, daß AM^- relativ interpretierbar bzgl. G ist. Dazu zeigen wir, daß $(\mathsf{AM}^-)^D$ interpretierbar in G ist. Von der in 5.3. erklärten Theorie E gehen wir zu einer Theorie E^- über, die sich von E nur dadurch unterscheidet, daß wir anstelle der Axiome des Schemas B^+ die Axiome der Gruppe B nehmen. (Ebenso könnte man von E' ausgehen.) Wir bestätigen, daß E^- eine definitorische Erweiterung von G bzgl. $(\mathsf{AM}^-)^D$ ist. Da bei den Beweisen der nicht-logischen Axiome '$\exists x Dx$', $(\mathrm{I.1})^D$ bis $(\mathrm{I.7})^D$, $(\mathrm{III})^D$ bis $(\mathrm{VII})^D$ von $(\mathsf{AM})^D$ in E nicht von dem Axiomenschema B^+ Gebrauch gemacht wurde, sind diese Beweise auch Beweise dieser nicht-logischen Axiome von $(\mathsf{AM}^-)^D$ in E^-. Es bleiben die Axiome des Schemas $(\mathrm{II}^-)^D$ in E^- zu beweisen. Nach 5.5.7. haben wir für jeden primitiven Ausdruck $H(a, a_1, \ldots, a_n)$ von AM,

in dem genau die Variablen $a, a_1, \ldots, a_n$ frei vorkommen und in dem die Variable b nicht vorkommt, zu zeigen, daß $\ulcorner \forall a_1 \ldots \forall a_n (Da_1 \wedge \cdots \wedge Da_n \rightarrow \exists b (Db \wedge (\boldsymbol{Kl})^D b \wedge \wedge \forall a (a \in b \leftrightarrow \boldsymbol{El}a \wedge (H(a, a_1, \ldots, a_n))^D)))\urcorner$ in E^- beweisbar ist. Dazu zeigen wir zunächst, daß für jeden primitiven Ausdruck H von AM der Ausdruck $\ulcorner (H)^D \urcorner$ äquivalent zu einer *normal propositional function* (vgl. GÖDEL 1940, Seite 12—13) ist. Für primitive Ausdrücke H von AM definieren wir induktiv den *Grad von* H, $Gr(H)$, und den *Typ von* H, $Tp(H)$. $Gr(H) = 0$, wenn H ein primitiver Ausdruck von AM ist, in dem kein Ausdruck der Form $\ulcorner a = \iota b H(b) \urcorner$ vorkommt. $Gr(H) = n + 1$, wenn H ein primitiver Ausdruck von AM ist, in dem ein Ausdruck der Form $\ulcorner a = \underset{b}{\boldsymbol{K}} H(b) \urcorner$ oder der Form $\ulcorner a = \underset{b}{\boldsymbol{M}} H(b) \urcorner$ vorkommt, wobei $Gr(H(b)) = n$ und wobei für jeden Ausdruck der Form $\ulcorner \underset{b}{\boldsymbol{K}} a = H(b) \urcorner$ bzw. der Form $\ulcorner a = \underset{b}{\boldsymbol{M}} H(b) \urcorner$, der in H vorkommt, $Gr(H(b)) < n + 1$. $Tp(H) = 0$, wenn H einer der in 4.3. (1) oder (2) aufgeführten Ausdrücke von AM ist. $Tp(H) = n + 1$, wenn H von einer der Formen $\ulcorner \sim H_0 \urcorner$, $\ulcorner (H_1 \wedge H_2) \urcorner$, $\ulcorner (H_1 \vee H_2) \urcorner$, $\ulcorner (H_1 \rightarrow H_2) \urcorner$, $\ulcorner (H_1 \leftrightarrow H_2) \urcorner$, $\ulcorner \forall a (\boldsymbol{El}a \rightarrow H(a)) \urcorner$, $\ulcorner \exists a (\boldsymbol{El}a \wedge H(a)) \urcorner$ ist, wobei $Tp(H_0) = n$, $Tp(H(a)) = n$, $Tp(H_1) \leqq n$, $Tp(H_2) \leqq n$ und $Tp(H_1) = n$ oder $Tp(H_2) = n$. Der Beweis der Behauptung, daß für jeden primitiven Ausdruck H von AM der Ausdruck $\ulcorner (H)^D \urcorner$ in E^- äquivalent zu einer *normal propositional function* ist, verläuft induktiv über den Grad von H. Wir beweisen zunächst, daß für Ausdrücke H von AM mit $Gr(H) = 0$ $\ulcorner (H)^D \urcorner$ in E^- äquivalent zu einer *normal propositional function* ist. Dieser Beweis verläuft induktiv über den Typ von H:

(1) $Tp(H) = 0$.
$\ulcorner (b \in c)^D \urcorner$ ist der Ausdruck $\ulcorner b \in c \urcorner$,
$\ulcorner (b \subseteq c)^D \urcorner$ ist der Ausdruck $\ulcorner b \subseteq c \urcorner$,
$\ulcorner (b = c)^D \urcorner$ ist der Ausdruck $\ulcorner b = c \urcorner$,
$\ulcorner (\boldsymbol{El}b)^D \urcorner$ ist nach 5.4.5.1. äquivalent zu $\ulcorner (Db \wedge Mb) \urcorner$, und die definierenden Ausdrücke von 'D', '$\in$' und '$\subseteq$' in E^- sind nach GÖDEL 1940 *normal propositional functions*.

(2) Für alle Ausdrücke H mit $Gr(H) = 0$ und $Tp(H) \leqq n$ gelte die Behauptung (Induktionsannahme).

(3) $Tp(H) = n + 1$.
$\ulcorner (\sim H_0)^D \urcorner$ ist der Ausdruck $\ulcorner \sim (H_0)^D \urcorner$,
$\ulcorner ((H_1 \wedge H_2))^D \urcorner$ ist der Ausdruck $\ulcorner ((H_1)^D \wedge (H_2)^D) \urcorner$,
$\ulcorner ((H_1 \vee H_2))^D \urcorner$ ist der Ausdruck $\ulcorner ((H_1)^D \vee (H_2)^D) \urcorner$,
$\ulcorner ((H_1 \rightarrow H_2))^D \urcorner$ ist der Ausdruck $\ulcorner ((H_1)^D \rightarrow (H_2)^D) \urcorner$,
$\ulcorner ((H_1 \leftrightarrow H_2))^D \urcorner$ ist der Ausdruck $\ulcorner ((H_1)^D \leftrightarrow (H_2)^D) \urcorner$,
$\ulcorner (\forall b (\boldsymbol{El}b \rightarrow H(b)))^D \urcorner$ ist der Ausdruck $\ulcorner \forall b (Db \rightarrow ((\boldsymbol{El})^D b \rightarrow (H(b))^D)) \urcorner$, der nach 5.4.5.1. äquivalent ist zu $\ulcorner \forall b (Mb \rightarrow (\boldsymbol{D}b \rightarrow (H(b))^D)) \urcorner$,
$\ulcorner (\exists b (\boldsymbol{El}b \wedge H(b)))^D \urcorner$ ist der Ausdruck $\ulcorner \exists b (\boldsymbol{D}b \wedge ((\boldsymbol{El})^D b \wedge (H(b))^D)) \urcorner$, der nach 5.4.5.1. äquivalent ist zu $\ulcorner \exists b (Mb \wedge \boldsymbol{D}b \wedge (H(b))^D) \urcorner$.

Sei die Behauptung, daß für jeden primitiven Ausdruck H von AM der Ausdruck $\ulcorner (H)^D \urcorner$ in E^- äquivalent zu einer *normal propositional function* ist, für alle

H mit $Gr(H) \leqq n$ bewiesen. Wir zeigen induktiv über den Typ, daß dann auch für alle Ausdrücke H mit $Gr(H) = n + 1$ diese Behauptung beweisbar ist:

(1) $Tp(H) = 0$.

$\ulcorner(c = \iota d(\boldsymbol{Kl}d \wedge \forall b(b \in d \leftrightarrow \boldsymbol{El}b \wedge H(b))))^{\boldsymbol{D}}\urcorner$ ist nach 2.3. äquivalent zu $\ulcorner c = \iota d(\boldsymbol{D}d \wedge (\boldsymbol{Kl})^{\boldsymbol{D}}d \wedge \forall b(\boldsymbol{D}b \to (b \subset d \leftrightarrow (\boldsymbol{El})^{\boldsymbol{D}}b \wedge (H(b))^{\boldsymbol{D}})))\urcorner$. Da $Gr(H(b)) \leqq n$, existiert nach der Induktionsannahme eine zu $\ulcorner(H(b))^{\boldsymbol{D}}\urcorner$ in E^- äquivalente *normal propositional function*. Und somit existiert nach 5.3., 5.4.5.3. auch zu $\ulcorner(\boldsymbol{D}d \wedge (\boldsymbol{Kl})^{\boldsymbol{D}}d \wedge \forall b(\boldsymbol{D}b \to (b \in d \leftrightarrow (\boldsymbol{El})^{\boldsymbol{D}}b \wedge (H(b))^{\boldsymbol{D}})))\urcorner$ eine in E^- äquivalente *normal propositional function*. Ist $H^*(d)$ eine solche in E^- äquivalente *normal propositional function*, so gilt nach [G/M 3] $\vdash_{\overline{\mathsf{G}}} \ulcorner\exists c\, c = \iota d H^*(d)\urcorner$. Also ist $\ulcorner(c = \iota d(\boldsymbol{Kl}d \wedge \forall b(b \in d \leftrightarrow \boldsymbol{El}b \wedge H(b))))^{\boldsymbol{D}}\urcorner$ in E^- äquivalent zu einer *normal propositional function*. Kommt $\ulcorner c = \iota d(\boldsymbol{Kl}d \wedge \forall b(b \in d \leftrightarrow \boldsymbol{El}b \wedge H(b)))\urcorner$ in $\ulcorner \underset{b}{\boldsymbol{K}} H(b) \in d_0\urcorner$ vor, so ist $\ulcorner(\underset{b}{\boldsymbol{K}} H(b) \in d_0)^{\boldsymbol{D}}\urcorner$ äquivalent zu der *normal propositional function* $\ulcorner \iota d H^*(d) \in d_0\urcorner$. Analoges gilt offenbar auch, wenn $\ulcorner c = \iota d(\boldsymbol{Kl}d \wedge \forall b(b \in d \leftrightarrow \boldsymbol{El}b \wedge H(b)))\urcorner$ in $\ulcorner \underset{b}{\boldsymbol{K}} H(b) \in d_0\urcorner$, $\ulcorner \underset{b}{\boldsymbol{K}} H(b) = d_0\urcorner$, $\ulcorner d_0 \in \underset{b}{\boldsymbol{K}} H(b)\urcorner$ oder $\ulcorner d_0 = \underset{b}{\boldsymbol{K}} H(b)\urcorner$ vorkommt. Analoge Betrachtungen gelten auch für $\ulcorner c = \iota d(\boldsymbol{Me}d \wedge \forall b(b \in d \leftrightarrow \boldsymbol{El}b \wedge H(b)))\urcorner$ anstelle von $\ulcorner c = \iota d(\boldsymbol{Kl}d \wedge \wedge \forall b(b \in d \leftrightarrow \boldsymbol{El}b \wedge H(b)))\urcorner$.

(2) Der Rest des Beweises verläuft wie im Beweisschritt $Gr(H) = 0$.

Abschließend zeigen wir, daß $\vdash_{\overline{\mathsf{E}}^-} \ulcorner\forall a_1 \ldots \forall a_n(Da_1 \wedge \cdots \wedge Da_n \to \exists b(Db \wedge (\boldsymbol{Kl})^{\boldsymbol{D}} b \wedge \forall a(a \in b \leftrightarrow \boldsymbol{El}a \wedge (H(a, a_1, \ldots, a_n))^{\boldsymbol{D}})))\urcorner$ für jeden primitiven Ausdruck $H(a, a_1, \ldots, a_n)$ von AM, in dem genau die Variablen $a, a_1, \ldots, a_n$ frei vorkommen und in dem die Variable b nicht vorkommt. Gelte $Da_1 \wedge \cdots \wedge Da_n$. Da $\ulcorner(H(a, a_1, \ldots, a_n))^{\boldsymbol{D}}\urcorner$ äquivalent zu einer *normal propositional function* und da $\ulcorner \boldsymbol{El}a\urcorner$ äquivalent zu einer *normal propositional function*, gibt es nach [G/M3] eine Klasse u, so daß $\ulcorner\forall a(a \varepsilon u \leftrightarrow \boldsymbol{El}a \wedge (H(a, a_1, \ldots, a_n))^{\boldsymbol{D}})\urcorner$ gilt. Der Rest des Beweises verläuft wie in 5.5.7.

7. Die endliche Axiomatisierbarkeit von AM^-

7.1. Um die endliche Axiomatisierbarkeit von AM^- zu zeigen, haben wir eine zu AM^- äquivalente Theorie F anzugeben, deren Sprache die Sprache von AM^- ist und deren Axiomensystem endlich ist. Dabei heißen zwei Theorien *äquivalent*, wenn jede der beiden Theorien eine Erweiterung der anderen ist. Die Sprache von F besteht also aus den binären Prädikaten '$\in$' und '$=$'. Die Axiome von F seien die Stufenaxiome I.1 bis I.7, das Extensionalitätsaxiom III, das Mengenbildungsaxiom IV, das Unendlichkeitsaxiom V, das Auswahlaxiom VI und das Ersetzungsaxiom VII der Theorie AM und weitere Aussagen II.0 bis II.10. (Auch in F sind die Aussagen '$\exists x x = \emptyset$', '$\exists x x = \boldsymbol{E}$', '$\exists x x = \boldsymbol{I}$', '$\exists x x = \boldsymbol{M}$' beweisbar.) Die Axiome II.1 bis II.8 entsprechen Gödels Axiomengruppe B, vgl. Gödel 1940. Das Axiom II.0, das *Paarungsaxiom*, entspricht Gödels Axiom A4, vgl. Gödel 1940. Das Paarungsaxiom ist die Aussage '$\forall x \forall y \exists r(\boldsymbol{Kl}r \wedge \forall z(z \in r \leftrightarrow \boldsymbol{El}z \wedge (z = x \vee z = y)))$'. Dieses

Paarungsaxiom ermöglicht die Einführung der Funktoren '$\{\,\}_2^{\cdot}$', '$\{\,\}_1^{\cdot}$', '$[\,]_2^{\cdot}$', '$[\,]_3^{\cdot}$', ... in F durch die Festsetzungen:

$$'\{\,\}_2(x,y)' =_{\mathrm{Df}} '\iota z(\boldsymbol{Kl}z \wedge \forall u(u \in z \leftrightarrow \boldsymbol{El}u \wedge (u = x \vee u = y)))',$$
$$'\{\,\}_1(x)' =_{\mathrm{Df}} '\{\,\}_2(x,x)',$$
$$'[\,]_2(x,y)' =_{\mathrm{Df}} '\{\,\}_2(\{\,\}_2(x,y),\{\,\}_1(y))',$$
$$'[\,]_3(x_1,x_2,x_3)' =_{\mathrm{Df}} '[\,]_2([\,]_2(x_1,x_2),x_3)', \ldots$$

(Wir bevorzugen meistens jedoch die üblichen mathematischen Bezeichnungen und schreiben '$\{x,y\}$', '$\{x\}$', '$[x,y]$', '$[x_1,x_2,x_3]$', ..., '$[\,]_1(x)$' steht für 'x'.)

Die weiteren Axiome von F sind die Aussagen:

II.1 $\exists r(\boldsymbol{Kl}r \wedge \forall z(z \in r \leftrightarrow \boldsymbol{El}z \wedge \exists u(\boldsymbol{El}u \wedge \exists v(\boldsymbol{El}v \wedge z = [u,v] \wedge u \in v))))$,

II.2 $\forall r \forall s \exists t(\boldsymbol{Kl}t \wedge \forall u(u \in t \leftrightarrow \boldsymbol{El}u \wedge u \in r \wedge u \in s))$,

II.3 $\forall r \exists s(\boldsymbol{Kl}s \wedge \forall u(u \in s \leftrightarrow \boldsymbol{El}u \wedge \sim u \in r))$,

II.4 $\forall r \exists s(\boldsymbol{Kl}s \wedge \forall u(u \in s \leftrightarrow \boldsymbol{El}u \wedge \exists v(\boldsymbol{El}v \wedge [u,v] \in r)))$,

II.5 $\forall r \exists s(\boldsymbol{Kl}s \wedge \forall z(z \in s \leftrightarrow \boldsymbol{El}z \wedge \exists u(\boldsymbol{El}u \wedge \exists v(\boldsymbol{El}v \wedge z = [u,v] \wedge u \in r))))$,

II.6 $\forall r \exists s(\boldsymbol{Kl}s \wedge \forall z(z \in s \leftrightarrow \boldsymbol{El}z \wedge \exists u(\boldsymbol{El}u \wedge \exists v(\boldsymbol{El}v \wedge z = [u,v] \wedge [v,u] \in r))))$,

II.7 $\forall r \exists s(\boldsymbol{Kl}s \wedge \forall z(z \in s \leftrightarrow \boldsymbol{El}z \wedge \exists u(\boldsymbol{El}u \wedge \exists v(\boldsymbol{El}v \wedge \exists w(\boldsymbol{El}w \wedge z = [u,v,w] \wedge [w,u,v] \in r)))))$,

II.8 $\forall r \exists s(\boldsymbol{Kl}s \wedge \forall z(z \in s \leftrightarrow \boldsymbol{El}z \wedge \exists u(\boldsymbol{El}u \wedge \exists v(\boldsymbol{El}v \wedge \exists w(\boldsymbol{El}w \wedge z = [u,v,w] \wedge [v,u,w] \in r)))))$,

II.9 $\exists r(\boldsymbol{Kl}r \wedge \forall z(z \in r \leftrightarrow \boldsymbol{El}z \wedge \exists u(\boldsymbol{El}u \wedge \exists v(\boldsymbol{El}v \wedge z = [u,v] \wedge u \in v))))$,

II.10 $\exists r(\boldsymbol{Kl}r \wedge \forall z(z \in r \leftrightarrow \boldsymbol{El}z \wedge \exists u(\boldsymbol{El}u \wedge \exists v(\boldsymbol{El}v \wedge z = [u,v] \wedge u = v))))$.

Die Aussage II.1 heißt das *Axiom der Elementbeziehung*. Die Aussage II.2 heißt das *Axiom des Durchschnitts*. Die Aussage II.3 heißt das *Axiom des Komplements*. Die Aussage II.4 heißt das *Axiom des Vorbereiches*. Die Aussage II.5 heißt das *Axiom des Produktes*. Die Aussagen II.6 bis II.8 nennen wir die *Axiome der Inversion* Die Aussage II.9 heißt das *Axiom der Stufenbeziehung*. Die Aussage II.10 schließlich heißt das *Axiom der Gleichheitsbeziehung*.

Die Axiome II.2, II.3 und II.4 gestatten in F die Einführung der Funktoren '$\cap$', '$\boldsymbol{C}$' und '$\boldsymbol{Vb}$' durch die Festsetzungen:

$$'\cap(x,y)' =_{\mathrm{Df}} '\iota z(\boldsymbol{Kl}z \wedge \forall u(u \in z \leftrightarrow u \in x \wedge u \in y))',$$
$$'\boldsymbol{C}(x)' =_{\mathrm{Df}} '\iota z(\boldsymbol{Kl}z \wedge \forall u(u \in z \leftrightarrow \boldsymbol{El}u \wedge \sim u \in z))',$$
$$'\boldsymbol{Vb}(x)' =_{\mathrm{Df}} '\iota z(\boldsymbol{Kl}z \wedge \forall u(u \in z \leftrightarrow \boldsymbol{El}u \wedge \exists v(\boldsymbol{El}v \wedge [u,v] \in x)))'.$$

(Für '$\cap(x,y)$' schreiben wir meistens '$x \cap y$'.)

7.2. Theorem über die endliche Axiomatisierbarkeit von AM$^-$. *In* F *ist für jeden primitiven Ausdruck* $H(b_1,\ldots,b_n)$, *in dem keine gebundene Variable frei vorkommt und in dem neben den Variablen* $b_1,\ldots,b_n$ *höchstens noch die Varia-*

blen $a_1, \ldots, a_m$ *frei vorkommen und in dem die Variable* c *nicht vorkommt, die Aussage* $\ulcorner \forall b_1 \ldots \forall b_n \exists c(\boldsymbol{Kl}c \wedge \forall a_1 \ldots \forall a_m([a_1, \ldots, a_m] \in c \leftrightarrow \boldsymbol{El}a_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{El}a_m \wedge H(b_1, \ldots, b_n)))\urcorner$ *beweisbar.*

Der Beweis dieses Theorems wird induktiv über den Typ von $H(b_1, \ldots, b_n)$ geführt. Er verläuft analog dem GÖDELschen Beweis des *General Existence Theorem*, vgl. GÖDEL 1940.

Aus diesem Theorem ergibt sich, daß in F insbesondere für jeden primitiven Ausdruck $H(a, b_1, \ldots, b_n)$, in dem genau die Variablen $a, b_1, \ldots, b_n$ frei vorkommen und in dem die Variable c nicht vorkommt, das Axiom $\ulcorner \forall b_1 \ldots \forall b_n \exists c(\boldsymbol{Kl}c \wedge \forall a(a \in c \leftrightarrow \boldsymbol{El}a \wedge H(a, b_1, \ldots, b_n)))\urcorner$ von AM^- beweisbar ist. Somit ist F eine Erweiterung von AM^-. Daß auch AM^- eine Erweiterung von F ist, folgt sofort aus der Tatsache, daß sämtliche Axiome von F Axiome von AM^- sind. Daher sind die beiden Theorien F und AM^- äquivalent.

8. Die relative Konsistenz der Theorie G^+ bzgl. der Theorie AM

8.1. Das Zeichen '$\boldsymbol{C}$' bezeichne das einstellige nicht unter den Konstanten der Theorie G^+ vorkommende Prädikat 'C' (intendierte Interpretation: *Klasse*). Wir zeigen, daß $(\mathsf{G}^+)^{\boldsymbol{C}}$ interpretierbar in AM ist. Daraus ergibt sich nach der Einleitung, daß G^+ relativ konsistent bzgl. AM ist. Nach [K/IV, § 19] gilt $\vdash_{\overline{\mathsf{AM}}} \exists x x = \Phi$, wobei

$$\text{'}\Phi\text{'} =_{\mathrm{Df}} \text{'}\iota z(z \textit{ Funktion von } \boldsymbol{O} \textit{ in } \boldsymbol{M} \wedge z(0) = \emptyset \wedge$$
$$\wedge \forall x(x \in \boldsymbol{O} \rightarrow z(x') = \boldsymbol{P} \bigcup_{y<x} z(y))$$
$$\wedge \forall x(x \textit{ ordinale Limeszahl} \rightarrow z(x) = \bigcup_{y<x} z(y)))\text{'}.$$

Die Aussagen

$$\forall x(Cx \leftrightarrow x \subseteq \bigcup \mathrm{Nb}\,\Phi),$$
$$\forall x(Mx \leftrightarrow x \in \bigcup \mathrm{Nb}\,\Phi),$$
$$\forall x \forall y(x \varepsilon y \leftrightarrow x \in y \wedge y \subseteq \bigcup \mathrm{Nb}\,\Phi)$$

bzgl. der Menge der nicht-logischen Konstanten 'C', 'M', 'ε', '$\in$' und '$\square$' sind mögliche Definitionen der nicht-logischen Konstanten von $(\mathsf{G}^+)^{\boldsymbol{C}}$ in AM.

Wir betrachten eine Theorie E:

(1) Die Konstanten von E seien die Konstanten der beiden Theorien AM und $(\mathsf{G}^+)^{\boldsymbol{C}}$.

(2) Die Axiome von E seien die Axiome von AM und die oben angegebenen möglichen Definitionen der nicht-logischen Konstanten von $(\mathsf{G}^+)^{\boldsymbol{C}}$ in AM.

E ist eine definitorische Erweiterung von AM bzgl. $(\mathsf{G}^+)^{\boldsymbol{C}}$. Dazu haben wir zu zeigen, daß alle nicht-logischen Axiome von $(\mathsf{G}^+)^{\boldsymbol{C}}$ in E beweisbar sind. Die nicht-logischen Axiome von $(\mathsf{G}^+)^{\boldsymbol{C}}$ sind dabei die Relativierungen der nicht-logischen Axiome von G^+ auf $\boldsymbol{C}$ und die Aussage '$\exists x C x$' von $(\mathsf{G}^+)^{\boldsymbol{C}}$.

8.2. Vorbereitende Betrachtungen. Die folgenden Resultate ergeben sich aus der Einführung von 'Φ' und aus den Definitionen der nicht-logischen Konstanten von $(\mathsf{G}^+)^C$ in E.

1. $\vdash_{\mathsf{E}} \forall x(Mx \to Cx)$,
2. $\vdash_{\mathsf{E}} \forall x((C \wedge M)\, x \leftrightarrow Mx)$,
3. $\vdash_{\mathsf{E}} \forall x \forall y(x \varepsilon y \to x \in y)$,
4. $\vdash_{\mathsf{E}} \forall x \forall y(x \varepsilon y \to Mx \wedge Cy)$,
5. $\vdash_{\mathsf{E}} \forall x \forall y(Cx \wedge Cy \to (\{\,\}_2)^C(x, y) = \{\,\}_2(x, y))$,
6. $\vdash_{\mathsf{E}} \forall x \forall y(Cx \wedge Cy \to (\langle\,\rangle_2)^C(x, y) = \langle\,\rangle_2(x, y))$,

. . . . . .

7. $\vdash_{\mathsf{E}} \forall x_1 \ldots \forall x_n(Cx_1 \wedge \cdots \wedge Cx_n \to (\langle\,\rangle_n)^C(x_1, \ldots, x_n) = \langle\,\rangle_n(x_1, \ldots, x_n))$,
8. $\vdash_{\mathsf{E}} \forall x \forall y(Mx \wedge My \to \{\,\}_2(x, y) = \underset{u}{\boldsymbol{M}}(u = x \vee u = y))$,
9. $\vdash_{\mathsf{E}} \forall x \forall y(Mx \wedge My \to \langle\,\rangle_2(x, y) = [y, x])$,

. . . . . .

10. $\vdash_{\mathsf{E}} \forall x_1 \ldots \forall x_n(Mx_1 \wedge \cdots \wedge Mx_n \to \langle\,\rangle_n(x_1, \ldots, x_n) = [x_n, \ldots, x_1])$.

8.3. Es folgen die Beweise der nicht-logischen Axiome von $(\mathsf{G}^+)^C$ in E.

8.3.1. Beweis von '$\exists x Cx$'. Es gilt zum Beispiel $C\emptyset$.

8.3.2. Beweis von $(\mathrm{A2})^C$: $\forall x(Cx \to \forall y(Cy \to (x \varepsilon y \to Mx)))$. Zum Beweis betrachte man 8.2.4.

8.3.3. Beweis von $(\mathrm{A3})^C$:

$$\forall x(Cx \to \forall y(Cy \to (\forall u(Cu \to (Mu \to (u \varepsilon x \leftrightarrow u \varepsilon y))) \to x = y))).$$

Dieses Axiom ist äquivalent zu $\forall x \forall y(Cx \wedge Cy \wedge \forall u(u \varepsilon x \leftrightarrow u \varepsilon y) \to x = y)$. Der Beweis der zu dem Axiom $(\mathrm{A3})^C$ äquivalenten Aussage ergibt sich aus den möglichen Definitionen der nicht-logischen Konstanten von $(\mathsf{G}^+)^C$ in AM und aus dem Extensionalitätsaxiom von AM.

8.3.4. Beweis des Axioms $(\mathrm{A4})^C$, das äquivalent ist zu $\forall x \forall y(Mx \wedge My \to$ $\to \exists z(Mz \wedge \forall u(u \varepsilon z \leftrightarrow u = x \vee u = y)))$. Man betrachte die Paarmenge $\underset{u}{\boldsymbol{M}}(u = x \vee$ $\vee\, u = y)$.

8.3.5. Beweis des Schemas $(\mathrm{B}^+)^C$. Die Axiome dieses Schemas sind nach den vorbereitenden Betrachtungen von 8.2. äquivalent zu den Axiomen des Schemas

$$\begin{aligned}&\forall b_1 \ldots \forall b_m(Cb_1 \wedge \cdots \wedge Cb_m \to\\ &\quad \to \exists a(Ca \wedge \forall a_1 \ldots \forall a_n(Ma_1 \wedge \cdots \wedge Ma_n \to\\ &\qquad \to (\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\, \varepsilon a \leftrightarrow (H(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m))^C)))).\end{aligned}$$

In jedem Ausdruck $H(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$ von G^+ schreibe man für die prädikativen Ausdrücke von $(\mathsf{G}^+)^C$ die entsprechenden definierenden Ausdrücke der zugehörigen nicht-logischen Konstanten von $(\mathsf{G}^+)^C$ in E. (Für 'Cx' schreibe man also '$x \subseteq \bigcup \mathrm{Nb}\, \Phi$'.) Dadurch geht $H(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$ in einen Ausdruck

$H_0(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$ von AM über, und in E sind diese beiden Ausdrücke von E äquivalent. $H_1(b, b_1, \ldots, b_m)$ sei der Ausdruck $\forall a_1 \ldots \forall a_n(Ma_1 \wedge \cdots \wedge Ma_n \wedge b = [a_n, \ldots, a_1] \wedge H_0(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m))$ von AM. Es gilt $\vdash_{\mathsf{E}} \forall b_1 \ldots \forall b_m \forall b(\boldsymbol{El}b \wedge H_1(b, b_1, \ldots, b_m) \leftrightarrow H_1(b, b_1, \ldots, b_m))$, und daher existiert für alle $b_1, \ldots, b_m$ in E die Klasse $\underset{b}{\boldsymbol{K}} H_1(b, b_1, \ldots, b_m)$. Da sich aus $Ma_1 \wedge \cdots \wedge Ma_n\, M[a_n, \ldots, a_1]$ ergibt, gilt für alle $b_1, \ldots, b_m$ $C \underset{b}{\boldsymbol{K}} H_1(b, b_1, \ldots, b_m)$. Aus 8.2. und aus der Definition von 'ε' in E erhalten wir

$$\vdash_{\mathsf{E}} \forall b_1 \ldots \forall b_m \forall a_1 \ldots \forall a_n (Cb_1 \wedge \cdots \wedge Cb_m \wedge Ma_1 \wedge \cdots \wedge Ma_n \rightarrow \rightarrow (\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \varepsilon \underset{b}{\boldsymbol{K}} H_1(b, b_1, \ldots, b_m) \leftrightarrow (H(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m))^C)).$$

8.3.6. Zum Beweis von $(\mathrm{C1})^{\boldsymbol{C}}$ betrachte man $\Phi(\omega)$.

8.3.7. Beweis von $(\mathrm{C2})^{\boldsymbol{C}}$. Dieses Axiom ist äquivalent zu $\forall x(Mx \rightarrow \exists y(My \wedge \wedge \forall u \forall v(u \varepsilon v \wedge v \varepsilon x \rightarrow u \varepsilon y)))$. Gilt Mx, so gibt es ein $z \in \boldsymbol{O}$, so daß $x \in \Phi(z)$. In E gilt dann $M\Phi(z) \wedge \forall u \forall v(u \varepsilon v \wedge v \varepsilon x \rightarrow u \varepsilon \Phi(z))$.

8.3.8. Beweis von $(\mathrm{C3})^{\boldsymbol{C}}$. Dieses Axiom von $(\mathsf{G}^+)^{\boldsymbol{C}}$ ist äquivalent zu $\forall x(Mx \rightarrow \rightarrow \exists y(My \wedge \forall u(Mu \wedge \forall v(v \varepsilon u \rightarrow v \varepsilon x) \rightarrow u \varepsilon y)))$. Gilt Mx, so gibt es ein $z \in \boldsymbol{O}$, so daß $x \in \Phi(z)$, und in E gilt $M\Phi(z') \wedge \forall u(Mu \wedge \forall v(v \varepsilon u \rightarrow v \varepsilon x) \rightarrow u \varepsilon \Phi(z'))$.

8.3.9. Beweis von $(\mathrm{C4})^{\boldsymbol{C}}$. Dieses Axiom ist äquivalent zu $\forall x \forall r(Mx \wedge Cr \wedge \wedge \forall u_0 \forall v_0 \forall w_0([u_0, v_0] \in r \wedge [u_0, w_0] \in r \rightarrow v_0 = w_0) \rightarrow \exists y(My \wedge \forall u(u \in y \leftrightarrow \exists v(v \in \in x \wedge [v, u] \in r))))$. Gilt $Mx \wedge Cr \wedge \forall u_0 \forall v_0 \forall w_0([u_0, v_0] \in r \wedge [u_0, w_0] \in r \rightarrow v_0 = w_0)$, so betrachte man $r \frown (x \times \boldsymbol{M})$. Nach [K/I, § 13, Satz 17] ist $r \frown (x \times \boldsymbol{M})$ eine eindeutige Abbildung aus x auf ein $y \in \boldsymbol{M}$. Da $r \subseteq \bigcup \mathrm{Nb}\, \Phi$, gilt in E $My \wedge \forall u(u \in y \leftrightarrow \leftrightarrow \exists v(v \in x \wedge [v, u] \in r))$.

8.3.10. Beweis von $(\mathrm{D})^{\boldsymbol{C}}$. $(\mathrm{D})^{\boldsymbol{C}}$ ist äquivalent zu $\forall r(Cr \wedge \exists u_0 u_0 \varepsilon r \rightarrow \exists u(u \varepsilon r \wedge \wedge \sim \exists u_0(u_0 \varepsilon u \wedge u_0 \varepsilon r)))$. Der Beweis dieser zu $(\mathrm{D})^{\boldsymbol{C}}$ äquivalenten Aussage von E ergibt sich aus dem Fundierungssatz (vgl. [K/I, § 4, 1d]).

8.3.11. Beweis von $(\mathrm{E})^{\boldsymbol{C}}$. Dieses Axiom von $(\mathsf{G}^+)^{\boldsymbol{C}}$ ist äquivalent zu $\exists r(Cr \wedge \wedge \forall u \forall v \forall w([u, v] \in r \wedge [u, w] \in r \rightarrow v = w) \wedge \forall x(Mx \wedge \exists u u \varepsilon x \rightarrow \exists y(y \varepsilon x \wedge [x, y] \in \in r)))$. Der Beweis dieser zu $(\mathrm{E})^{\boldsymbol{C}}$ äquivalenten Aussage von E ergibt sich aus [K/I, § 8, Satz 6], denn wegen $\bigcup \mathrm{Nb}\, \Phi \subseteq \boldsymbol{M}$ gibt es eine Auswahlfunktion r von $(\bigcup \mathrm{Nb}\, \Phi) \setminus \{\emptyset\}$. Da aus $s \in t \wedge t \in \bigcup \mathrm{Nb}\, \Phi$ sich $[t, s] \in \bigcup \mathrm{Nb}\, \Phi$ ergibt, ist eine Auswahlfunktion r von $(\bigcup \mathrm{Nb}\, \Phi) \setminus \{\emptyset\}$ eine Teilklasse von $\bigcup \mathrm{Nb}\, \Phi$, also gilt Cr.

Literatur

G. Asser, Einführung in die mathematische Logik. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1959.

P. Bernays, A system of axiomatic set theory, I. The Journal of Symbolic Logic **2** (1937), 65—77.

P. Bernays, A. A. Fraenkel, Axiomatic set theory. Studies in Logic, Amsterdam 1958.

R. Carnap, Meaning and necessity. The University of Chicago Press. Chicago, Illinois, 1956.

R. Carnap, Einführung in die symbolische Logik. Springer-Verlag, Wien 1960.

A. A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, Foundations of set theory. Studies in Logic, Amsterdam 1958.

K. GÖDEL, The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory. Annals of Mathematical Studies 3, Princeton, N.J., Princeton University Press, 1940.
D. KLAUA, Ein Aufbau der Mengenlehre mit transfiniten Typen, formalisiert im Prädikatenkalkül der ersten Stufe. Diese Zeitschr. **3** (1957), 303—316.
D. KLAUA, Allgemeine Mengenlehre — Ein Fundament der Mathematik. Akademie-Verlag, Berlin 1964.
G. KREISEL, Models, translations and interpretations. Mathematical interpretations of formal systems. Studies in Logic, Amsterdam 1955.
A. A. МАРКОВ, О зависимости аксиомы B 6 от других аксиом системы BERNAYS'a-GÖDEL'я. Известия академии наук СССР, серия математическая **12** (1948), 569—570.
R. MONTAGUE, Towards a general theory of computability. Logic and language. Synthese Library, Dordrecht 1962, 118—127.
R. MONTAGUE, Interpretability in terms of models. Indagationes Mathematicae **27** (1965), 467—476.
A. MOSTOWSKI, Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip. Fundamenta Mathematicae **32** (1939), 201—252.
A. MOSTOWSKI, Axiom of choice for finite sets. Fundamenta Mathematicae **33** (1945), 137—168.
W. V. O. QUINE, Mathematical logic. Harvard University Press, Cambridge 1951.
W. V. O. QUINE, Set theory and its logic. The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1963.
H. RASIOWA, R. SIKORSKI, The mathematics of metamathematics. Warszawa 1963.
J. B. ROSSER, Logic for mathematicians. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York 1953.
K. SCHRÖTER, Theorie des logischen Schließens I. Diese Zeitschr. **1** (1955), 37—86.
K. SCHRÖTER, Theorie des bestimmten Artikels. Diese Zeitschr. **2** (1956), 37—56.
J. C. SHEPHERDSON, Inner models for set theory — Part I. The Journal of Symbolic Logic **16** (1951), 161—190.
A. TARSKI, A. MOSTOWSKI, R. M. ROBINSON, Undecidable theories. Studies in Logic, Amsterdam 1953.

(Eingegangen am 21. März 1966)